

考点限时训练(二十三) 第 23 讲 不等式选讲(选修 4—5)

A 组 基础演练

1. 已知函数 $f(x) = |2x+1| + |2x-3|$.

(1) 求不等式 $f(x) \leq 6$ 的解集;

(2) 若关于 x 的不等式 $f(x) < |a-1|$ 的解集不是空集, 求实数 a 的取值范围.

2. 已知函数 $f(x) = |x+a| + |x-2|$.

(1) 当 $a=1$ 时, 求不等式 $f(x) \geq 7$ 的解集;

(2) 若 $f(x) \leq |x-4| + |x+2a|$ 的解集包含 $[0, 2]$, 求 a 的取值范围.

3. 已知函数 $f(x) = |x| + |x-1|$.

(1) 若 $f(x) \geq |m-1|$ 恒成立, 求实数 m 的最大值 M ;

(2) 在(1)成立的条件下, 正实数 a, b 满足 $a^2 + b^2 = M$, 证明:
 $a+b \geq 2ab$.

4. 设函数 $f(x) = |x-a|, a \in \mathbf{R}$.

(1) 当 $a=2$ 时, 解不等式: $f(x) \geq 6 - |2x-5|$;

(2) 若关于 x 的不等式 $f(x) \leq 4$ 的解集为 $[-1, 7]$, 且两正数 s 和 t 满足 $2s+t=a$, 求证: $\frac{1}{s} + \frac{8}{t} \geq 6$.

5. 已知关于 x 的不等式 $|2x-m| \leq 1$ 的整数解有且仅有一个值为 2.
- (1) 求整数 m 的值;
- (2) 函数 $f(x) = |2x-a| + a$, 若不等式 $f(x) \leq 6$ 的解集为 $\{x | -2 \leq x \leq 3\}$, 且存在实数 n 使 $f(n) \leq m - f(-n)$ 成立, 求实数 m 的取值范围.

7. 已知 $a > 0, b > 0, a+b=1$, 求证:

$$(1) \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{ab} \geq 8;$$

$$(2) \left(1 + \frac{1}{a}\right) \left(1 + \frac{1}{b}\right) \geq 9.$$

6. 设函数 $f(x) = |x-3| - |x+1|, x \in \mathbf{R}$.

- (1) 解不等式 $f(x) < -1$;
- (2) 设函数 $g(x) = |x+a| - 4$, 且 $g(x) \leq f(x)$ 在 $x \in [-2, 2]$ 上恒成立, 求实数 a 的取值范围.

B 组 能力提升

8. 已知函数 $f(x) = m - |x-1| - |x-2|, m \in \mathbf{R}$, 且 $f(x+1) \geq 0$ 的解集为 $[0, 1]$.
- (1) 求 m 的值;
- (2) 若 $a, b, c, x, y, z \in \mathbf{R}$, 且 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2 + c^2 = m$, 求证: $ax + by + cz \leq 1$.

9. 已知函数 $f(x) = k - |x - 3|$, $k \in \mathbf{R}$, 且 $f(x + 3) \geq 0$ 的解集为 $[-1, 1]$.

(1) 求 k 的值;

(2) 若 a, b, c 是正实数, 且 $\frac{1}{ka} + \frac{1}{2kb} + \frac{1}{3kc} = 1$.

求证: $a + 2b + 3c \geq 9$.

10. 已知函数 $f(x) = |x + 1|$.

(1) 解不等式 $f(x + 8) \geq 10 - f(x)$;

(2) 若 $|x| > 1$, $|y| < 1$, 求证: $f(y) < |x| \cdot f\left(\frac{y}{x^2}\right)$.

11. 已知函数 $f(x) = |x + 1|$.

(1) 求不等式 $f(x) < |2x + 1| - 1$ 的解集 M ;

(2) 设 $a, b \in M$, 证明: $f(ab) > f(a) - f(-b)$.