典例剖析

探究一　三角函数图象变换

例 1 已知曲线 $C_1:y=\cos x$,$C_2:y=\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)$,则下面结论正确的是　(　　)

A. 把 C_1 上各点的横坐标伸长到原来的 2 倍,纵坐标不变,再把得到的曲线向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度,得到曲线 C_2

B. 把 C_1 上各点的横坐标伸长到原来的 2 倍,纵坐标不变,再把得到的曲线向左平移$\frac{\pi}{12}$个单位长度,得到曲线 C_2

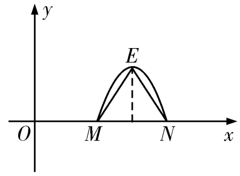
C. 把 C_1 上各点的横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$,纵坐标不变,再把得到的曲线向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度,得到曲线 C_2

D. 把 C_1 上各点的横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$,纵坐标不变,再把得到的曲线向左平移$\frac{\pi}{12}$个单位长度,得到曲线 C_2

【点评】对于三角函数图象的平移变换问题,其平移变换规则是“左加、右减”,并且在变换过程中只变换其自变量 x,如果 x 的系数不是 1,则需把 x 的系数提取后再确定平移的单位和方向.另外,当两个函数的名称不同时,首先要将函数名称统一,其次要把 $\omega x+\varphi$ 变成 $\omega\left(x+\frac{\varphi}{\omega}\right)$,最后确定平移的单位并根据$\frac{\varphi}{\omega}$的符号确定平移的方向.

探究二　由三角函数图象求解析式

例 2 已知奇函数 $f(x)=A\cos(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0,0<\varphi<\pi)$的导函数的部分图象如图所示,$E$ 是最高点,且$\triangle MNE$ 是边长为 1 的正三角形,那么 $f\left(\frac{1}{3}\right)=$　(　　)



A. $-\frac{\sqrt{3}}{2\pi}$　　B. $-\frac{1}{2}$

C. $\frac{1}{4}$　　D. $-\frac{3}{4\pi}$

【点评】已知函数图象求 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0)$的解析式时,常用的方法是待定系数法.由图中的最高点、最低点或特殊点求 A;由函数的周期确定 ω;确定 φ 常根据“五点法”中的五个点求解,其中一般把第一个零点作为突破口,可以从图象的升降找准第一个零点的位置.

探究三　讨论三角函数的单调性

例 3 已知函数 $f(x)=\sqrt{2}\sin\omega x-\sqrt{2}\cos\omega x(\omega<0)$,若 $y=f\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$的图象与 $y=f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$的图象重合,记 ω 的最大值为 ω_0,则函数 $g(x)=\cos\left(\omega_0 x-\frac{\pi}{3}\right)$的单调递增区间为　(　　)

A. $\left[-\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2},-\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}\right](k\in\mathbf{Z})$

B. $\left[-\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2},\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}\right](k\in\mathbf{Z})$

C. $\left[-\frac{\pi}{3}+2k\pi,-\frac{\pi}{12}+2k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$

D. $\left[-\frac{\pi}{12}+2k\pi,-\frac{\pi}{6}+2k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$

【点评】研究函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的性质的“两种”意识.
(1)转化意识:利用三角恒等变换把待求函数化成 $y=A\sin(\omega x+\varphi)+B$ 的形式;
(2)团体意识:类比研究 $y=\sin x$ 的性质,只需将 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$中的“$\omega x+\varphi$”看成 $y=\sin x$ 中的“x”代入求解便可.
提醒:在求 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的单调区间时,要特别注意 A 和 ω 的符号,必要时通过诱导公式先将 ω 的符号化为正的.

例 4 设 $f(x)=a\sin 2x+b\cos 2x$,其中 $a,b\in\mathbf{R}$,$ab\neq0$,若 $f(x)\leqslant\left|f\left(\frac{\pi}{6}\right)\right|$对一切 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立,则

①$f\left(\frac{11\pi}{12}\right)=0$;

②$\left|f\left(\frac{7\pi}{10}\right)\right|<\left|f\left(\frac{\pi}{5}\right)\right|$;

③$f(x)$既不是奇函数也不是偶函数;

④$f(x)$的单调递增区间是$\left[k\pi+\frac{\pi}{6},k\pi+\frac{2\pi}{3}\right](k\in\mathbf{Z})$;

⑤存在经过点(a,b)的直线与函数 $f(x)$的图象不相交.

以上结论正确的是________(写出所有正确结论的编号).

【点评】分析研究函数的周期性或单调性,应将题设三角函数解析式恒等变形为 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0)$型(或 $y=A\cos(\omega x+\varphi)$,$y=A\tan(\omega x+\varphi)$型),然后再应用相关方法求解.

探究四　求三角函数在闭区间上的最值(或值域)

例 5 已知函数 $f(x)=4\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+x\right)-2\sqrt{3}\cos 2x-1$,且给定条件 p:“$\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$”.

(1)求 $f(x)$的最大值及最小值;