例 4 设函数 $f(x)=\frac{x^2}{2}-k\ln x, k>0$.

(1)求 $f(x)$ 的单调区间和极值；

(2)证明：若 $f(x)$ 存在零点，则 $f(x)$ 在区间 $(1,\sqrt{e}]$ 上仅有一个零点.

探究三　零点虚设与替换

例 5 设函数 $f(x)=e^{2x}-a\ln x$.

(1)讨论 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 零点的个数；

(2)证明：当 $a>0$ 时，$f(x)\geqslant 2a+a\ln\frac{2}{a}$.

【小结】 当我们研究函数的极值大小时，经常遇到一些较难确定大小的代数式(如 $f(x_0)=e^{2x_0}-a\ln x_0$)，而 x_0 又是一个无法算得的数值，这时我们利用极值点处的导数为零这一条件(如 $f'(x_0)=2e^{2x_0}-\frac{a}{x_0}=0$)，消去某些式子，得到较为简单的代数式(如 $f(x_0)=\frac{a}{2x_0}+2ax_0+a\ln\frac{2}{a}$)，使研究更为简便.

探究四　双变量问题

例 6 已知函数 $f(x)=\ln x+ax, a\in\mathbf{R}$.

(1)讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

(2)若函数 $f(x)$ 的两个零点为 x_1, x_2，且 $\frac{x_2}{x_1}\geqslant e^2$，求证：$(x_1-x_2)f'(x_1+x_2)>\frac{6}{5}$.

真题演练

1. (2019·全国卷Ⅰ)已知函数 $f(x)=2\sin x-x\cos x-x$，$f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导数.

   (1)证明：$f'(x)$ 在区间 $(0,\pi)$ 存在唯一零点；

   (2)若 $x\in[0,\pi]$ 时，$f(x)\geqslant ax$，求 a 的取值范围.

2.(2019·全国卷Ⅱ)已知函数 $f(x)=(x-1)\ln x-x-1$.证明：

(1)$f(x)$存在唯一的极值点；

(2)$f(x)=0$ 有且仅有两个实根，且两个实根互为倒数.

3.(2018·全国卷Ⅰ)已知函数 $f(x)=ae^x-\ln x-1$.

(1)设 $x=2$ 是 $f(x)$的极值点，求 a，并求 $f(x)$的单调区间；

(2)证明：当 $a\geqslant\frac{1}{e}$时，$f(x)\geqslant0$.

4.(2018·全国卷Ⅱ)已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-a(x^2+x+1)$.

(1)若 $a=3$，求 $f(x)$的单调区间；

(2)证明：$f(x)$只有一个零点.

5.(2017·全国卷Ⅰ)已知函数 $f(x)=e^x(e^x-a)-a^2x$.

(1)讨论 $f(x)$的单调性；

(2)若 $f(x)\geqslant0$，求 a 的取值范围.

温馨提示：请完成考点限时训练(十九)p_{150}