第 4 讲　圆锥曲线的综合问题

考情分析

年份	卷别	题号	考查内容	命题规律
2019	全国卷Ⅰ	21	圆的方程的求解问题、圆锥曲线中的定点定值类问题	圆锥曲线的综合问题通常是高考数学的重点和难点，一般多以中档偏难或难题出现. 其主要题型有：求动点轨迹问题、求参数取值范围问题、求最值的问题、有关定值、定点的证明问题、存在探索类问题等等. 经常与向量、三角函数、方程、不等式等知识结合在一起.
	全国卷Ⅱ	20	求椭圆的离心率，以及椭圆中定点问题	
	全国卷Ⅲ	21	圆锥曲线中的定点问题和圆的方程	
2018	全国卷Ⅰ	20	直线与抛物线相交，角度转化证明	
	全国卷Ⅱ	20	抛物线与直线和圆的综合	
	全国卷Ⅲ	20	直线与椭圆相交，长度转化	
2017	全国卷Ⅰ	12	与椭圆有关的范围	
		20	直线与抛物线相交	
	全国卷Ⅱ	20	直线与椭圆相交，轨迹与过定点问题	

备考建议

1. 圆锥曲线的综合问题一般以直线和圆锥曲线的位置关系为载体，以参数处理为核心，考查范围、最值问题，定点、定值问题，探索性问题.

2. 试题解答往往要综合应用函数与方程、数形结合、分类讨论等多种思想方法，对计算能力也有较高要求，难度较大.

专题探究

探究一　轨迹问题

例 1 (1)已知 $M(4,0)$，$N(1,0)$，若动点 P 满足 $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MP}=6|\overrightarrow{NP}|$，求动点 P 的轨迹 C 的方程；

(2)已知两个定圆 O_1 和 O_2，它们的半径分别是 1 和 2，且 $|O_1O_2|=4$. 动圆 M 与圆 O_1 内切，又与圆 O_2 外切，建立适当的坐标系，求动圆圆心 M 的轨迹方程，并说明轨迹是何种曲线；

(3)已知长为 $1+\sqrt{2}$ 的线段 AB 的两个端点 A、B 分别在 x 轴、y 轴上滑动，P 是 AB 上一点，且 $\overrightarrow{AP}=\frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{PB}$，求点 P 的轨迹 C 的方程.

探究二　最值与范围问题

例 2 (1)已知点 F_1,F_2 是 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 的左、右焦点,点 P 在椭圆上运动,则 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}$ 的最大值是　(　　)

A. 4　　B. 5　　C. 2　　D. 1

(2)若 $C(-\sqrt{3},0)$,$D(\sqrt{3},0)$,M 是椭圆 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 上的动点,则 $\frac{1}{|MC|}+\frac{1}{|MD|}$ 的最小值为________.

(3)已知椭圆 C_1:$\frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{b_1^2}=1(a_1>b_1>0)$ 与双曲线 C_2:$\frac{x^2}{a_2^2}-\frac{y^2}{b_2^2}=1(a_2>0,b_2>0)$ 有相同的焦点 F_1,F_2,点 P 是两曲线的一个公共点,且 $PF_1\perp PF_2$,e_1,e_2 分别是两曲线 C_1,C_2 的离心率,则 $9e_1^2+e_2^2$ 的最小值是　(　　)

A. 4　　B. 6　　C. 8　　D. 16

(4)已知点 P 是抛物线 $y^2=4x$ 上的一点,过 P 作直线 $x=-2$ 的垂线,垂足为 H,直线 l 经过原点,由 l 上的一点 Q 向圆 C:$(x+5)^2+(y-3)^2=2$ 引两条切线,分别切圆 C 于 M,N 两点,且△MQN 为直角三角形,则 $|PQ|+|PH|$ 的最小值是________.

(5)已知双曲线 $\frac{x^2}{5}-y^2=1$ 的焦点是椭圆 C:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的顶点,且椭圆与双曲线的离心率互为倒数.

(ⅰ)求椭圆 C 的方程;

(ⅱ)设动点 M,N 在椭圆 C 上,且 $|MN|=\frac{4\sqrt{3}}{3}$,记直线 MN 在 y 轴上的截距为 m,求 m 的最大值.

【小结】涉及到圆锥曲线上动点的距离最值问题,注意其“范围”即坐标的取值范围这一隐含条件. 解决圆锥曲线的最值与范围问题常见的解法有两种:几何法和代数法. 若题目的条件和结论能明显体现几何特征和意义,则考虑利用图形性质来解决,这就是几何法. 若题目的条件和结论能体现一种明确的函数关系,则可首先建立起目标函数,再求这个函数的最值,这就是代数法.

圆锥曲线上的点到直线的距离问题的处理方法:

(1)直接用点到直线的距离公式;

(2)转化为与已知直线平行的切线问题;

(3)利用参数方程.

探究三　定点与定值问题

例 3 (1)设 F 为抛物线 $y^2=4x$ 的焦点,A、B、C 为该抛物线上三点,若 $\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FC}=\mathbf{0}$,则 $|\overrightarrow{FA}|+|\overrightarrow{FB}|+|\overrightarrow{FC}|=$　(　　)

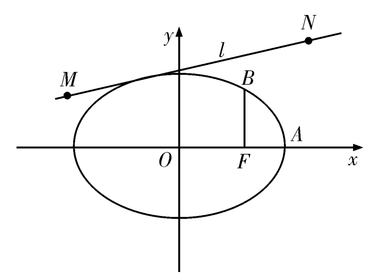
A. 6　　B. 9　　C. 3　　D. 4

(2)已知点 $B(-1,0)$,设不垂直于 x 轴的直线 l 与抛物线 $y^2=8x$ 交于不同的两点 P,Q,若 x 轴是∠PBQ 的角平分线,则直线 l 过定点________.

(3)如图,已知椭圆 C 的中心在原点,焦点在 x 轴上,离心率 $e=\frac{\sqrt{2}}{2}$,F 是右焦点,A 是右顶点,B 是椭圆上一点,$BF\perp x$ 轴,$|BF|=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(ⅰ)求椭圆 C 的方程;

(ⅱ)设直线 l:$x=ty+\lambda$ 是椭圆 C 的一条切线,点 $M(-\sqrt{2},y_1)$,点 $N(\sqrt{2},y_2)$是切线 l 上两个点,证明:当 t,λ 变化时,以 MN 为直径的圆过 x 轴上的定点,并求出定点坐标.



(4)过点 $P(a,-2)$作抛物线 $C:x^2=4y$ 的两条切线，切点分别为 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$.

(ⅰ)证明：$x_1x_2+y_1y_2$ 为定值；

(ⅱ)记△PAB 的外接圆的圆心为点 M，点 F 是抛物线 C 的焦点，对任意实数 a，试判断以 PM 为直径的圆是否恒过点 F？并说明理由.

【小结】1. 动线过定点问题的两大类型及解法

(1)动直线 l 过定点问题，解法：设动直线方程(斜率存在)为 $y=kx+t$，由题设条件将 t 用 k 表示为 $t=mk$，得 $y=k(x+m)$，故动直线过定点$(-m,0)$；

(2)动曲线 C 过定点问题，解法：引入参变量建立曲线 C 的方程，再根据其对参变量恒成立，令其系数等于零，得出定点.

2. 求解定值问题的两大途径

(1) 由特例得出一个值(此值一般就是定值)

→ 证明定值：将问题转化为证明待证式与参数(某些变量)无关

(2)先将式子用动点坐标或动线中的参数表示，再利用其满足的约束条件使其绝对值相等的正负项抵消或分子、分母约分得定值.

探究四　存在探索性问题

例 4 (1)已知椭圆 G 的中心在坐标原点，长轴在 x 轴上，离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，两个焦点分别为 F_1 和 F_2，椭圆 G 上一点到 F_1 和 F_2 的距离之和为 12. 圆 $C_k:x^2+y^2+2kx-4y-21=0(k\in\mathbf{R})$的圆心为点 A_k.

(ⅰ)求椭圆 G 的方程；

(ⅱ)求△$A_kF_1F_2$ 的面积；

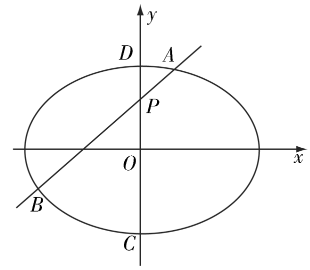
(ⅲ)问是否存在圆 C_k 包围椭圆 G？请说明理由.

(2)设 M 为曲线 C 上任意一点,$F(1,0)$ 为定点,已知点 M 到直线 $x=4$ 的距离等于 $2|MF|$.

(ⅰ)求曲线 C 的方程;

(ⅱ)设直线 l 是圆 $x^2+y^2=2$ 的任意一条切线,且与曲线 C 相交于 A、B 两点,O 为坐标原点. 试推断是否存在直线 l,使 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=1$? 若存在,求出直线 l 的方程;若不存在,请说明理由.

(3)如图,椭圆 E:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率是 $\frac{\sqrt{2}}{2}$,点 $P(0,1)$ 在短轴 CD 上,且 $\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PD}=-1$.



(ⅰ)求椭圆 E 的方程;

(ⅱ)设 O 为坐标原点,过点 P 的动直线与椭圆交于 A,B 两点. 是否存在常数 λ,使得 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\lambda\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 为定值? 若存在,求 λ 的值;若不存在,请说明理由.