第 13 讲　圆锥曲线方程及几何性质

专题探究

【命题趋势】

圆锥曲线的几何性质常与代数、三角函数、平面向量、不等式等知识交汇在一起进行命题，综合性强，体现了在知识的交汇点处命题的原则，新课标全国卷有关圆锥曲线模块的命题一般是“一大两小”，以 2 道小题考查圆锥曲线的定义，离心率，标准方程以及几何性质，其中有关双曲线的考查大都是客观题，以一道解答题(大题)的某小问在直线与圆锥曲线位置关系的情境中考查圆锥曲线方程的求法. 而解答题一般涉及椭圆或抛物线. 预计高考对本节知识的考查体现在：圆锥曲线内部综合，即以选择题、填空题的形式考查椭圆、双曲线、抛物线的几何性质，特别是求离心率、焦点关系等. 以解答题形式考查主要是解答题的第一问，求最值及过定点问题.

【备考建议】

圆锥曲线的几何性质一直是高考命题的热点内容之一，小题与解答题均有考查，往往具有信息量大、思维量大、运算量大的特点. 复习时不能把目标仅仅定位在知识的掌握上，要在解题方法、解题思想上深入下去. 解析几何中基本的解题方法是使用代数方程的方法研究直线、曲线的某些几何性质，代数方程是解题的桥梁，要掌握一些解方程(组)的方法，掌握一元二次方程的知识在解析几何中的应用，掌握使用韦达定理进行整体代入的解题方法；而且要求考生要有不怕困难的精神，良好的心理品质，细心认真的态度，有较强的运算能力. 要善于观察、发现题目的特点，根据圆锥曲线各基本量的几何特征，运用数形结合，分类讨论思想、函数与方程思想、化归与转化等思想方法简化计算.

典例剖析

探究一　圆锥曲线的定义及应用

例 1 (1)设椭圆的两个焦点分别为 F_1、F_2，过 F_2 作椭圆长轴的垂线交椭圆于点 P，若$\triangle F_1PF_2$ 为等腰直角三角形，则椭圆的离心率是　(　　)

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$

C. $2-\sqrt{2}$　　D. $\sqrt{2}-1$

(2)已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别为 F_1，F_2，焦距为 $2c$，直线 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}(x+c)$与双曲线的一个交点 P 满足$\angle PF_2F_1=2\angle PF_1F_2$，则该双曲线的离心率为　(　　)

A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{3}$

C. $2\sqrt{3}+1$　　D. $\sqrt{3}+1$

(3)已知直线 $y=k(x+2)(k>0)$与抛物线 C：$y^2=8x$ 相交于 A、B 两点，F 为 C 的焦点. 若 $FA=2FB$，则 $k=$________.

【点评】涉及到圆锥曲线上的点与焦点的距离一般用定义转化化简，最值问题须充分注意动点坐标的取值范围.

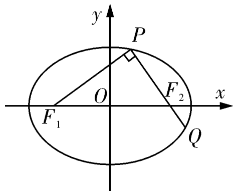
探究二　圆锥曲线标准方程及应用

例 2 (1)已知双曲线$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{b^2}=1(b>0)$，以原点为圆心，双曲线的实半轴长为半径的圆与双曲线的两条渐近线相交于 A、B、C、D 四点，四边形 $ABCD$ 的面积为 $2b$，则双曲线的方程为　(　　)

A. $\frac{x^2}{4}-\frac{3y^2}{4}=1$　　B. $\frac{x^2}{4}-\frac{4y^2}{3}=1$

C. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{8}=1$　　D. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$

(2)如图,椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为 F_1,F_2,过 F_2 的直线交椭圆于 P、Q 两点,且 $PQ\perp PF_1$.



(ⅰ)若$|PF_1|=2+\sqrt{2}$,$|PF_2|=2-\sqrt{2}$,求椭圆的标准方程;

(ⅱ)若$|PF_1|=|PQ|$,求椭圆的离心率 e.

探究三　圆锥曲线几何性质及应用

例 3 (1)[2019·浙江]已知椭圆$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$的左焦点为 F,点 P 在椭圆上且在 x 轴的上方,若线段 PF 的中点在以原点 O 为圆心,$|OF|$ 为半径的圆上,则直线 PF 的斜率是__________.

【点评】本题主要考查椭圆的标准方程、椭圆的几何性质、直线与椭圆的位置关系,利用数形结合思想,是解答解析几何问题的重要途径.

(2)[2018·全国卷Ⅱ]已知 F_1,F_2 是椭圆 C:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左,右焦点,$A$ 是 C 的左顶点,点 P 在过 A 且斜率为$\frac{\sqrt{3}}{6}$的直线上,$\triangle PF_1F_2$ 为等腰三角形,$\angle F_1F_2P=120°$,则 C 的离心率为　　(　　)

A. $\frac{2}{3}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{4}$

【点评】本题主要考查椭圆的几何性质——椭圆的离心率,考查考生的数形结合能力.

例 4 [2018·全国卷Ⅲ]已知斜率为 k 的直线 l 与椭圆 C:$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 交于 A,B 两点.线段 AB 的中点为 $M(1,m)(m>0)$.

(1)证明:$k<-\frac{1}{2}$;

(2)设 F 为 C 的右焦点,P 为 C 上一点,且$\overrightarrow{FP}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}=\mathbf{0}$.证明:$|\overrightarrow{FA}|$,$|\overrightarrow{FP}|$,$|\overrightarrow{FB}|$成等差数列,并求该数列的公差.

【点评】本题考查椭圆的方程及简单几何性质、直线的斜率公式、直线与椭圆的位置关系,向量的坐标运算与向量的模等,考查运算求解能力、数形结合思想.

规律总结

1. 圆锥曲线的定义是一个重要考点，在解答题中有广泛的应用，对圆锥曲线定义的理解注意以下几点：

①定义中对常数 $2a$ 是有范围要求的，椭圆中要求 $2a>|F_1F_2|$，而双曲线中则要求 $2a<|F_1F_2|$.

②抛物线定义中，定点 F 不能在定直线 l 上.

③利用抛物线的定义解题是一种重要题型，其实质是通过抛物线的定义实现一种转化，即抛物线上的点到焦点的距离与到准线的距离之间的转化.

④用圆锥曲线的定义求轨迹方程是一种重要的方法.

2. 圆锥曲线标准方程及应用

①求解圆锥曲线的标准方程的方法是“先定位，后定量”. 所谓“定位”，是指确定类型，也就是确定焦点所在的坐标轴，从而设出相应的标准方程的形式；“定量”就是指利用待定系数法求出方程中的 a^2、b^2、p 的值，最后代入所设的椭圆、双曲线、抛物线的标准方程.

②根据圆锥曲线的方程求基本量时，必须先把方程化为标准方程的形式再进行求解计算.

③椭圆的标准方程中 $a\neq b$，应特别注意这一条件，若 $a=b$，则方程表示圆.

3. 椭圆和双曲线的离心率是反映椭圆的扁平程度和双曲线开放程度，求解圆锥曲线离心率是高考的热点. 在求解有关离心率的问题时，一般并不是直接求出 c 和 a 的值，而是根据题设结合椭圆或双曲线的几何特征，建立关于参量 c、a、b 的方程或不等式，通过解方程或不等式求得离心率的值或范围.

4. 与圆锥曲线有关的参数范围问题常用两种方法：(1)利用题意结合图形列出所讨论的参数适合的不等式(组)，通过解不等式(组)解出参数的范围；(2)把参数作为一个函数，求出函数解析式，通过讨论函数的值域求参数的范围.

5. 解决圆锥曲线的最值问题常见的解法有两种：几何法和代数法. 若题目的条件和结论能明显体现几何特征和意义，则考虑利用图形性质来解决，这就是几何法. 若题目的条件和结论能体现一种明确的函数关系，则可首先建立起目标函数，再求这个函数的最值，这就是代数法.

高考回眸

考题1 [2019·全国卷Ⅰ]已知椭圆 C 的焦点为 $F_1(-1,0)$，$F_2(1,0)$，过 F_2 的直线与 C 交于 A，B 两点. 若 $|AF_2|=2|F_2B|$，$|AB|=|BF_1|$，则 C 的方程为（　　）

A. $\frac{x^2}{2}+y^2=1$　　B. $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$

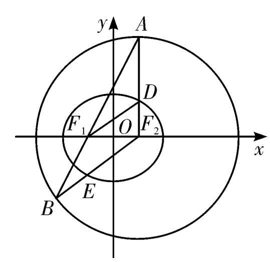
C. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$　　D. $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$

考题2 [2019·全国卷Ⅰ]已知双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别为 F_1，F_2，过 F_1 的直线与 C 的两条渐近线分别交于 A，B 两点. 若 $\overrightarrow{F_1A}=\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{F_1B}\cdot\overrightarrow{F_2B}=0$，则 C 的离心率为________.

考题3 [2019·江苏]如图，在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的焦点为 $F_1(-1,0)$，$F_2(1,0)$. 过 F_2 作 x 轴的垂线 l，在 x 轴的上方，l 与圆 F_2：$(x-1)^2+y^2=4a^2$ 交于点 A，与椭圆 C 交于点 D. 连结 AF_1 并延长交圆 F_2 于点 B，连结 BF_2 交椭圆 C 于点 E，连结 DF_1. 已知 $DF_1=\frac{5}{2}$.

(1)求椭圆 C 的标准方程；

(2)求点 E 的坐标.



温馨提示：请完成考点限时训练(十三)P126