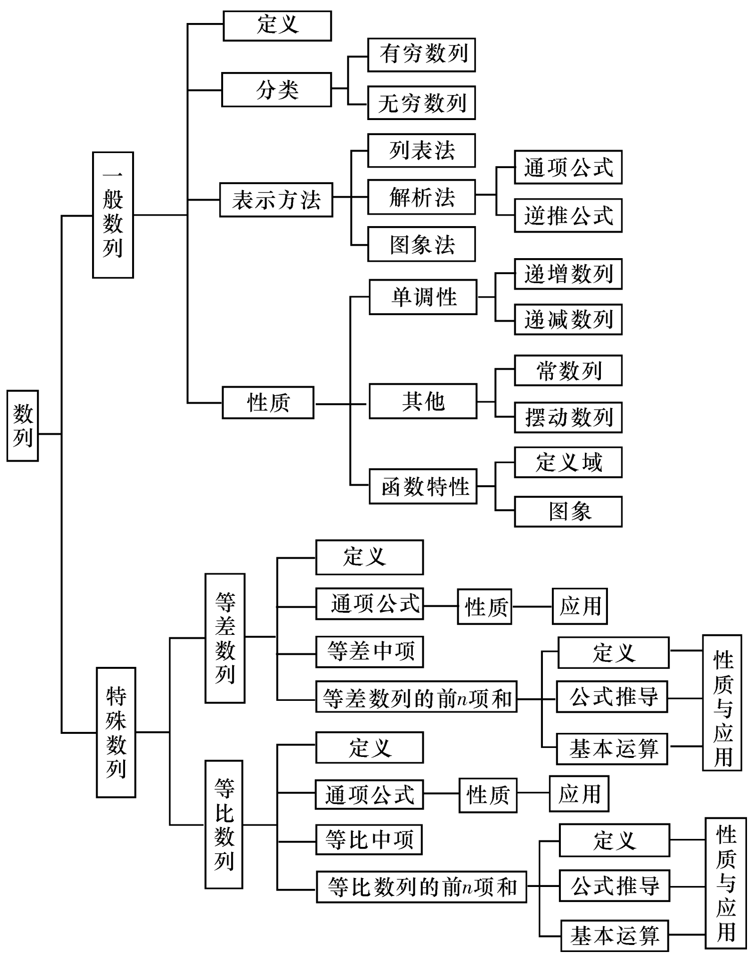
专题三　数　　列

第 1 讲　等差数列与等比数列的性质

知 识 网 络



考情分析

年份	卷别	题号	考查内容	命题规律
2019	全国卷Ⅰ	14,18	等差、等比的基本运算	等差与等比数列的概念、基本性质、简单运算及证明方法.
	全国卷Ⅱ	18	等差、等比的基本运算	
	全国卷Ⅲ	6,14	等差、等比的基本运算	
2018	全国卷Ⅰ	17	数列特殊项、等比数列的证明及通项公式	
	全国卷Ⅱ	17	等差数列通项公式及前 n 项和的最值	
	全国卷Ⅲ	17	等比数列通项公式及前 n 项和	
2017	全国卷Ⅰ	17	等比数列通项公式及等差数列的证明	
	全国卷Ⅱ	17	等差、等比数列的通项公式及前 n 项和	
	全国卷Ⅲ	17	通项公式及裂项求和	

备考建议

1. 深刻理解等差数列和等比数列的基本概念、性质，熟练掌握这两种数列常用的判定、证明方法，这类问题经常出现在以递推数列为背景的试题第(1)问中.

2. 能正确使用等差(比)数列的定义、性质是掌握好本节考点的关键.解题时应从基础着笔，首先要熟练掌握等差数列、等比数列的相关性质及公式，然后要熟悉它们的灵活变形，善用技巧，减少运算量，这是迅速、准确解题的关键.运用方程的思想解答等差(比)数列计算问题是常见题型，解决此类问题需要抓住基本量 a_1、d(或 q)，掌握好设取未知数、列出方程、解方程三个环节，常通过“设而不求，整体代入”来简化运算.

专题探究

探究一　等差(比)数列的基本量的计算

例 1 (1)已知$\{a_n\}$是公差为 1 的等差数列，S_n 为$\{a_n\}$的前 n 项和，若 $S_8=4S_4$，则 $a_{10}=$　(　　)

A. $\frac{17}{2}$　　B. $\frac{19}{2}$

C. 10　　D. 12

(2)记 S_n 为等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和. 若 $a_4+a_5=24$，$S_6=48$，则$\{a_n\}$的公差为　(　　)

A. 1　　B. 2　　C. 4　　D. 8

(3)已知数列$\{a_n\}$是递增的等比数列，$a_1+a_4=9$，$a_2a_3=8$，则数列$\{a_n\}$的前 n 项和等于__________.

【小结】对于等差(比)数列有关计算问题主要围绕等差(比)数列的通项公式和前 n 项和公式，在两个公式中共五个量 a_1、d(或 q)、n、a_n、S_n，已知其中三个量可求出剩余的量，而 a_1 与 d(或 q)是最基本的，由它们可以确定等差(比)数列的通项公式和前 n 项和公式.

探究二　等差(比)数列的判定与证明

例 2 (1)已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=\frac{3}{5}$，$a_n=2-\frac{1}{a_{n-1}}(n\geqslant 2,n\in \mathbf{N}^*)$，数列$\{b_n\}$满足 $b_n=\frac{1}{a_n-1}(n\in \mathbf{N}^*)$.

(ⅰ)求证：数列$\{b_n\}$是等差数列；

(ⅱ)求数列$\{a_n\}$的通项公式.

(2)已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$,$na_{n+1}=2(n+1)a_n$.设$b_n=\frac{a_n}{n}$.

(ⅰ)求b_1,b_2,b_3;

(ⅱ)判断数列$\{b_n\}$是否为等比数列,并说明理由;

(ⅲ)求$\{a_n\}$的通项公式.

【小结】1.等差、等比数列的判定方法:

(1)定义法:$a_{n+1}-a_n=d$(d为常数)$\Leftrightarrow\{a_n\}$是等差数列;

$\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$(q为非零常数)$\Leftrightarrow\{a_n\}$是等比数列.

(2)利用中项法:$2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}(n\in\mathbf{N}^*)\Leftrightarrow\{a_n\}$是等差数列;

$a_{n+1}^2=a_n\cdot a_{n+2}(n\in\mathbf{N}^*)\Leftrightarrow\{a_n\}$是等比数列(注意等比数列中$a_n\neq0,q\neq0$).

(3)通项公式法:$a_n=pn+b$(p,b为常数)$\Leftrightarrow\{a_n\}$是等差数列;

$a_n=cq^n$(c,q为非零常数)$\Leftrightarrow\{a_n\}$是等比数列.

(4)前n项和公式法:$S_n=An^2+Bn$(A,B为常数)$\Leftrightarrow\{a_n\}$是等差数列;

$S_n=mq^n-m$(m为常数且$m\neq0,q\neq0,1$)$\Leftrightarrow\{a_n\}$是等比数列.

(5)若判断一个数列既不是等差数列又不是等比数列,只需用$a_1,a_2,a_3\cdots$验证即可.

2.等差、等比数列的证明方法:

证明一个数列为等差(比)数列常用定义法与等差(比)中项法,其他方法只用于选择题、填空题中的判定;若证明某数列不是等差(比)数列,则只要证明存在连续三项不成等差(比)数列即可.

探究三　等差(比)数列的性质应用

例3 (1)(ⅰ)设数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$都是等差数列.若$a_1+b_1=7$,$a_3+b_3=21$,则$a_5+b_5=$________;

(ⅱ)若一个等差数列的前4项和为36,后4项和为124,且所有项的和为780,则这个数列的项数为________.

(2)(ⅰ)已知等比数列$\{a_n\}$中,$a_n>0$,$(2a_4+a_2+a_6)a_4=36$,则$a_3+a_5=$________;

(ⅱ)设等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n,已知$S_3=8$,$S_6=7$,则$a_7+a_8+a_9=$______.

【小结】1.等差数列下标和性质:若$p+q=m+n$($m,n,p,q\in\mathbf{N}^*$),则$a_p+a_q=a_m+a_n$.

2.等比数列下标积性质:若$m+n=p+q$($m,n,p,q\in\mathbf{N}^*$),则$a_m\cdot a_n=a_p\cdot a_q$.

在等比数列中,若$S_n\neq0$,则$S_n,S_{2n}-S_n,S_{3n}-S_{2n}$成等比数列;等比数列有很多子数列仍是等比数列,但其前提条件是$S_n\neq0$.

探究四　等差数列中的最值

例4 (1)等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n,已知$a_1=13$,$S_3=S_{11}$,当S_n最大时,n的值是 (　　)

A. 5　　B. 6　　C. 7　　D. 8

(2)等差数列$\{a_n\}$中,已知$a_7>0$,$a_3+a_9<0$,则$\{a_n\}$的前n项和S_n的最小值为 (　　)

A. S_4　　B. S_5

C. S_6　　D. S_7

【小结】求等差数列前n项和的最值的常用方法:

(1)利用等差数列的单调性,求出其正负转折项,便可求得和的最值;

(2)将等差数列的前n项和$S_n=An^2+Bn$(A,B为常数)看作二次函数,根据二次函数的性质求最值.

探究五　等差(比)数列的综合应用

例 5 已知$\{a_n\}$是以a为首项,q为公比的等比数列,S_n为它的前n项和.

(1)当S_1、S_3、S_4成等差数列时,求q的值;

(2)当S_m、S_n、S_l成等差数列时,求证:对任意自然数k,a_{m+k}、a_{n+k}、a_{l+k}也成等差数列.

例 6 已知a_1,a_2,a_3,a_4成等比数列,且$a_1+a_2+a_3+a_4=\ln(a_1+a_2+a_3)$.若$a_1>1$,则　　(　　)

A. $a_1<a_3,a_2<a_4$　　B. $a_1>a_3,a_2<a_4$

C. $a_1<a_3,a_2>a_4$　　D. $a_1>a_3,a_2>a_4$

【小结】在等差数列与等比数列的综合问题中,特别要注意它们的区别,避免用错公式;方程思想的应用往往是破题的关键;等差数列、等比数列的综合问题解题关键仍然是“基本量”方法,先通过方程或者方程组求出数列的基本量,再解决后续问题.

真题演练

1.(2019·全国卷Ⅰ)记S_n为等差数列$\{a_n\}$的前n项和,已知$S_9=-a_5$.

(1)若$a_3=4$,求$\{a_n\}$的通项公式;

(2)若$a_1>0$,求使得$S_n\geqslant a_n$的n的取值范围.

2.(2019·全国卷Ⅱ)已知$\{a_n\}$是各项均为正数的等比数列,$a_1=2$,$a_3=2a_2+16$.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式;

(2)设$b_n=\log_2 a_n$,求数列$\{b_n\}$的前n项和.

温馨提示:请完成考点限时训练(七)p120

第2讲　数列通项与求和

备考建议

1. 牢固掌握等差数列和等比数列的递推公式和通项公式,熟悉以递推公式求通项公式的六种方法(观察法、构造法、猜归法、累加法、累积法、待定系数法)为依托,掌握常见的递推数列的解题方法. 对于既非等差又非等比的数列要综合运用观察、归纳、猜想、证明等方法进行研究,要善于将其转化为特殊数列.

2. 对于数列求和部分的复习要注意以下几点:①熟练掌握等差数列、等比数列的求和公式及其变形公式,这是数列求和的基础;②掌握好分组、裂项、错位相减、倒序相加法这几种重要的求和方法,特别要掌握好裂项与错位相减求和的方法,这是高考考查的重点;③掌握一些与数列求和有关的综合问题的解决方法,如求数列前 n 项和的最值,研究前 n 项和所满足的不等式等.

专题探究

探究一　由 S_n 与 a_n 的关系式求 a_n

例1 (1)已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 $S_n=\frac{1}{4}n^2+\frac{2}{3}n+3$,则数列$\{a_n\}$的通项公式 $a_n=$________________.

(2)设 S_n 是数列$\{a_n\}$的前 n 项和,且 $a_1=-1$,$a_{n+1}=S_nS_{n+1}$,则 $S_n=$________.

(3)已知数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$满足:$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\cdots+a_nb_n=(n-1)\cdot 2^{n+1}+2(n\in \mathbf{N}^*)$,若$\{b_n\}$是首项为1,公比为2的等比数列,则数列$\{a_n\}$的通项公式是________.

【小结】S_n 与 a_n 关系问题的求解思路

根据所求结果的不同要求,将问题向不同的两个方向转化:

(1)利用 $a_n=S_n-S_{n-1}(n\geqslant 2)$转化为只含 S_n,S_{n-1} 的关系式,再求解;

(2)利用 $S_n-S_{n-1}=a_n(n\geqslant 2)$转化为只含 a_n,a_{n-1} 的关系式,再求解.

解题时要注意变量的取值范围,且注意检验特殊情况是否成立.

探究二　由 a_n 与 a_{n+1} 的递推关系式求 a_n

例2 在数列$\{a_n\}$中,

(1)若 $a_1=2$,$a_{n+1}=a_n+3n+2$,则数列$\{a_n\}$的通项公式 $a_n=$________;

(2)若 $a_1=1$,$na_{n-1}=(n+1)a_n(n\geqslant 2)$,则数列$\{a_n\}$的通项公式 $a_n=$________.

【小结】1. 形如 $a_{n+1}=a_n+f(n)$的递推关系式利用累加法求通项公式,特别注意能消去多少项,保留多少项.

2. 形如 $a_{n+1}=a_n\cdot f(n)$的递推关系式可化为$\frac{a_{n+1}}{a_n}=f(n)$的形式,可用累乘法,也可用 $a_n=\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdot\cdots\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot a_1$ 代入求出通项.

探究三　数列的周期性问题

例3 (1)在数列$\{a_n\}$中,$a_1=2$,$a_n+a_{n+1}=1(n\in\mathbf{N}^*)$,设 S_n 为数列$\{a_n\}$的前 n 项和,则 $S_{2020}-2S_{2019}+S_{2018}$的值为　　(　　)

A. -1　　B. -2

C. -3　　D. 3

(2)数列$\{a_n\}$的通项公式 $a_n=n\cos\frac{n\pi}{2}$,其前 n 项和为 S_n,则 $S_{2020}=$________.

【小结】解决数列周期性问题的方法:先根据已知条件求出数列的前几项,确定数列的周期,再根据周期性求值.

探究四　求数列的前 n 项和

例4 (1)已知等差数列$\{a_n\}$中,$2a_2+a_3+a_5=20$,且前10项和 $S_{10}=100$.

(ⅰ)求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(ⅱ)若 $b_n=\frac{1}{a_na_{n+1}}$,求数列$\{b_n\}$的前 n 项和 T_n.

【小结】1. 利用裂项相消法求和时，应注意抵消后并不一定只剩下第一项和最后一项，也有可能前面剩两项，后面也剩两项.

2. 将通项公式裂项后，有时候需要调整前面的系数，使裂开的两项之差和系数之积与原通项公式相等.

(2)已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，数列$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$是公差为1的等差数列，且$a_2=3$，$a_3=5$.

(ⅰ)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(ⅱ)设$b_n=a_n\cdot 3^n$，求数列$\{b_n\}$的前n项和T_n.

【小结】1. 一般地，如果数列$\{a_n\}$是等差数列，$\{b_n\}$是等比数列，求数列$\{a_n\cdot b_n\}$的前n项和时，可采用错位相减法求和.

2. 在写出“S_n”与“qS_n”的表达式时应特别注意将两式“错项对齐”以便下一步准确写出“S_n-qS_n”的表达式.

(3)求$\sin^2 1°+\sin^2 2°+\sin^2 3°+\cdots+\sin^2 89°$的值.

【小结】数列求和的常用方法有：公式法、分组求和法、倒序相加法、错位相减法、裂项相消法等，在选择方法前分析数列的通项公式的结构特征，避免盲目套用、错用求和方法. 运用等比数列求和公式时，注意对公比是否等于1进行讨论. 本题主要使用了倒序相加法.

(4)已知数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=\frac{n^2+n}{2}$，$n\in\mathbf{N}^*$.

(ⅰ)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(ⅱ)设$b_n=2^{a_n}+(-1)^n a_n$，求数列$\{b_n\}$的前$2n$项和.

(5)若数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=(-1)^{n-1}\cdot n$，且其前n项和为S_n，则$S_{17}+S_{33}+S_{50}$等于　　(　　)

A. 1　　B. -1　　C. 0　　D. 2

(6)在数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_2=2$，且$a_{n+2}-a_n=1+(-1)^n(n\in\mathbf{N}^*)$，则$S_{100}=$________.

【小结】1. 若数列$\{c_n\}$的通项公式为$c_n=a_n\pm b_n$，且$\{a_n\}$，$\{b_n\}$为等差或等比数列，可采用分组求和法求数列$\{c_n\}$的前n项和.

2. 若数列$\{c_n\}$的通项公式为$c_n=\begin{cases}a_n, n\text{为奇数},\\ b_n, n\text{为偶数},\end{cases}$其中数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$是等比数列或等差数列，可采用分组求和法求$\{a_n\}$的前$n$项和.

真题演练

1.(2019·天津)设$\{a_n\}$是等差数列,$\{b_n\}$是等比数列,公比大于0.已知$a_1=b_1=3$,$b_2=a_3$,$b_3=4a_2+3$.

(1)求$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式;

(2)设数列$\{c_n\}$满足$c_n=\begin{cases}1,n\text{为奇数},\\ b_{\frac{n}{2}},n\text{为偶数},\end{cases}$求$a_1c_1+a_2c_2+\cdots+a_{2n}c_{2n}(n\in\mathbf{N}^*)$.

2.(2018·天津)设$\{a_n\}$是等差数列,其前n项和为$S_n(n\in\mathbf{N}^*)$;$\{b_n\}$是等比数列,公比大于0,其前n项和为$T_n(n\in\mathbf{N}^*)$.已知$b_1=1$,$b_3=b_2+2$,$b_4=a_3+a_5$,$b_5=a_4+2a_6$.

(1)求S_n和T_n;

(2)若$S_n+(T_1+T_2+\cdots+T_n)=a_n+4b_n$,求正整数$n$的值.

温馨提示:请完成考点限时训练(八)p122