第 14 讲　直线与圆锥曲线的位置关系

专题探究

【命题趋势】

1.本部分考查的知识点主要是直线与圆锥曲线的关系中的弦长、焦点弦、弦中点、直线与曲线的切线等问题,有些问题还涉及到代数、几何、三角函数、平面向量等多方面的知识.

2.题型多以解答题为主,由于考查的知识点较综合,所以难度也较大.

3.预计在今年的高考中,对本节的考查仍是热点.主要以解答题形式综合考查直线与圆锥曲线位置关系的判定、求参数取值范围及求最值等问题,难度较大.

【备考建议】

1.复习直线与圆锥曲线公共点个数的问题,一是转化为直线方程与圆锥曲线方程的方程组的解的个数;二是数形结合.在用方程组解的个数问题研究曲线交点个数时,应注意分类讨论的数学思想的应用,如对直线的斜率是否存在,方程中二次项系数是否为0,方程根的符号问题等.

2.直线与圆锥曲线的位置关系,从几何角度看,可以分为三类:无公共点、仅有一个公共点及有两个相异的公共点.

(1)复习直线与圆锥曲线的相离关系时,常通过求曲线上的点到已知直线的距离的最大值和最小值来解决.

(2)直线与圆锥曲线仅有一个公共点,对于圆或椭圆,表示直线与其相切;对于双曲线,表示直线与其相切或与双曲线的渐近线平行;对于抛物线,表示直线与其相切或直线与其对称轴平行.

(3)直线与圆锥曲线有两个相异的公共点,表示直线与圆锥曲线相割,此时直线被圆锥曲线截得的线段称为圆锥曲线的弦.

典例剖析

探究一　直线与圆锥曲线位置关系的判定与应用

例 1 (1)直线 $y=kx+1$ 与椭圆 $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{m}=1$ 恒有公共点,则 m 的取值范围是__________.

(2)直线 l:$y=k(x-\sqrt{2})$ 与曲线 $x^2-y^2=1$ $(x>0)$ 相交于 A、B 两点,则直线 l 倾斜角的取值范围是　　(　　)

A. $[0,\pi)$

B. $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right)$

C. $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$

D. $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right]$

【点评】一般遇到直线与双曲线的位置关系时,注意结合其渐近线分析求解.

例 2 (1)已知直线 l 和双曲线 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$ 相交于 A,B 两点,线段 AB 的中点为 M.设直线 l 的斜率为 k_1 $(k_1\neq 0)$,直线 OM(O 为坐标原点)的斜率为 k_2,则 k_1k_2 等于　　(　　)

A. $\frac{2}{3}$

B. $-\frac{2}{3}$

C. $-\frac{4}{9}$

D. $\frac{4}{9}$

(2)直线 $3x-4y+4=0$ 与抛物线 $x^2=4y$ 和圆 $x^2+(y-1)^2=1$ 从左到右的交点依次为 A、B、C、D,则 $\frac{|AB|}{|CD|}$ 的值为　　(　　)

A. 16　　B. $\frac{1}{16}$

C. 4　　D. $\frac{1}{4}$

探究二　中点弦问题

例 3 已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的一个顶点为$B(0,4)$，离心率$e=\frac{\sqrt{5}}{5}$，直线$l$交椭圆于$M$、$N$两点.

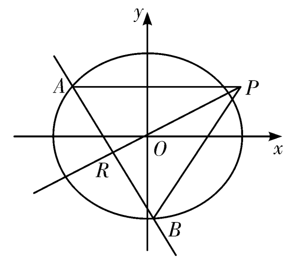
(1)若直线l的方程为$y=x-4$，求弦MN的长；

(2)如果$\triangle BMN$的重心恰好为椭圆的右焦点F，求直线l方程的一般式.

【点评】中点弦问题求解有两种方法，一是联立方程组，利用根与系数的关系求解；二是“点差法”. 本题用的是第一种.

探究三　弦长问题

例 4 如图，椭圆C:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{1}{2}$，其左焦点到点$P(2,1)$的距离为$\sqrt{10}$. 不过原点$O$的直线$l$与$C$相交于$A$,$B$两点，且线段$AB$被直线$OP$平分.



(1)求椭圆C的方程；

(2)求$\triangle ABP$的面积取最大时直线l的方程.

【点评】斜率为k的直线被圆锥曲线截得弦AB，若A、B两点的坐标分别为$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$，则$|AB|=|x_1-x_2|\cdot\sqrt{1+k^2}=|y_1-y_2|\cdot\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}(k\neq0)$，利用这个公式求弦长时，应注意应用韦达定理. 但与焦点弦长有关的问题，要注意应用圆锥曲线的定义.

规律总结

1. 关于相交弦的中点问题，常用到一元二次方程根与系数的关系，这样可直接得到两交点的坐标之和，也可用点差法找到两点坐标之和，直接与中点建立联系.

2. 弦长公式：$l=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|=\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}|y_1-y_2|$，结合根与系数的关系和一元二次方程根的判别式，与焦点弦长有关问题，要注意应用圆锥曲线的定义，如抛物线焦点弦长公式为 x_1+x_2+p.

3. 直线与圆锥曲线的位置关系是高考热点，在解决有关中点、弦长、垂直、对称等问题时，常用到数形结合思想，设而不求法，弦长公式及根与系数的关系.

高考回眸

考题 1 [2019·天津]已知抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 F，准线为 l，若 l 与双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的两条渐近线分别交于点 A 和点 B，且 $|AB|=4|OF|$(O 为原点)，则双曲线的离心率为 ( )

A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{3}$

C. 2　　D. $\sqrt{5}$

考题 2 [2019·全国卷Ⅰ]已知抛物线 C：$y^2=3x$ 的焦点为 F，斜率为 $\frac{3}{2}$ 的直线 l 与 C 的交点为 A，B，与 x 轴的交点为 P.

(1)若 $|AF|+|BF|=4$，求 l 的方程；

(2)若 $\overrightarrow{AP}=3\overrightarrow{PB}$，求 $|AB|$.

温馨提示：请完成考点限时训练(十四)p128