第 15 讲　直线与圆锥曲线的综合问题

专题探究

【命题趋势】

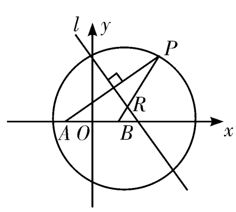
有关圆锥曲线的轨迹问题、定点与定值问题、最值问题、参变量范围问题和探究性问题是高考命题的常见题型和基本问题，主要考查转化化归能力、推理论证能力、运算求解能力以及创新意识和应用意识，充分体现了数形结合思想，函数与方程思想. 可以预测 2020 年的高考命题，有关解析几何的综合性问题仍将是轨迹问题、定点与定值问题、最值问题、参变量范围问题、探究性问题和恒等证明问题中的两个或三个问题组合构建而成.

典例剖析

探究一　轨迹问题

例 1　如图，在平面直角坐标系 xOy 中，已知圆 B：$(x-1)^2+y^2=16$ 与点 $A(-1,0)$，P 为圆 B 上的动点，线段 PA 的垂直平分线交直线 PB 于点 R，点 R 的轨迹记为曲线 C.

(1)求曲线 C 的方程；



(2)曲线 C 与 x 轴正半轴交点记为 Q，过原点 O 且不与 x 轴重合的直线与曲线 C 的交点记为 M，N，连结 QM，QN，分别交直线 $x=t$(t 为常数，且 $t\neq2$)于点 E，F，设 E，F 的纵坐标分别为 y_1，y_2，求 $y_1\cdot y_2$ 的值(用 t 表示).

【点评】(1)求轨迹方程时，先看轨迹的形状能否预知，若能预先知道轨迹为圆锥曲线，则可考虑用定义法或待定系数法求解.

(2)当曲线上动点的坐标受到另外一些点的坐标制约时，可以用相关点法；轨迹问题解决的方法有很多，学习中要重视总结各种方法适用的条件特征，以便解题中灵活选用，解题中要注意避免轨迹方程不满足纯粹性与完备性的错误.

探究二　圆锥曲线中的定点、定值问题

例 2　已知动圆过定点 $A(4,0)$，且在 y 轴上截得弦 MN 的长为 8.

(1)求动圆圆心的轨迹 C 的方程；

(2)已知点 $B(-1,0)$，设不垂直于 x 轴的直线 l 与轨迹 C 交于不同的两点 P，Q，若 x 轴是$\angle PBQ$ 的角平分线，证明：直线 l 过定点.

【点评】定点问题实质上是一个恒成立问题，解题中有可能先根据条件求出曲线的方程然后变量分离确定定点坐标，也可能先根据特殊情况求出定点位置，再证该定点符合普通情况.

例 3 已知椭圆 C:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$,$A(a,0)$,$B(0,b)$,$O(0,0)$,$\triangle OAB$的面积为 1.

(1)求椭圆 C 的方程;

(2)设 P 为椭圆 C 上一点,直线 PA 与 y 轴交于点 M,直线 PB 与 x 轴交于点 N.

求证:$|AN|\cdot|BM|$为定值.

【点评】解析几何中的定值问题是指某些几何量(如线段的长度、图形的面积、角的度数、直线的斜率等的大小或某些代数表达式的值等和题目中的参数无关,不依参数的变化而变化,而始终是一个确定的值).求定值问题常见的方法有两种:①从特殊入手,求出定值,再证明这个值与变量无关;②直接推理、计算,并在计算推理的过程中消去变量,从而得到定值.

探究三 圆锥曲线中的最值问题、范围问题

例 4 设圆 $x^2+y^2+2x-15=0$ 的圆心为 A,直线 l 过点 $B(1,0)$且与 x 轴不重合,l 交圆 A 于 C,D 两点,过 B 作 AC 的平行线交 AD 于点 E.

(1)证明$|EA|+|EB|$为定值,并写出点 E 的轨迹方程;

(2)设点 E 的轨迹为曲线 C_1,直线 l 交 C_1 于 M,N 两点,过 B 且与 l 垂直的直线与圆 A 交于 P,Q 两点,求四边形 $MPNQ$ 面积的取值范围.

【点评】求解参变量取值范围问题的常用方法:(1)构造不等式法:根据题设条件以及曲线的几何性质(如:曲线的范围、对称性、位置关系等),建立关于特定字母的不等式(或不等式组),然后解不等式(或不等式组),求得特定字母的取值范围.(2)构造函数法:根据题设条件,用其他的变量或参数表示欲求范围的特定字母,即建立关于特定字母的目标函数,然后研究该函数的值域或最值情况,从而得到特定字母的取值范围.(3)数形结合法:研究特定字母所对应的几何意义,然后根据相关曲线的定义、几何性质,利用数形结合的方法求解.

例 5 已知椭圆 $C_1:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，$P(-2,0)$是它的一个顶点. 过点 P 作圆 $C_2:x^2+y^2=r^2$ 的切线 PT，T 为切点，且$|PT|=\sqrt{2}$.

(1)求椭圆 C_1 及圆 C_2 的方程；

(2)过点 P 作互相垂直的两条直线 l_1，l_2，其中 l_1 与椭圆的另一交点为 D，l_2 与圆交于 A，B 两点，求$\triangle ABD$面积的最大值.

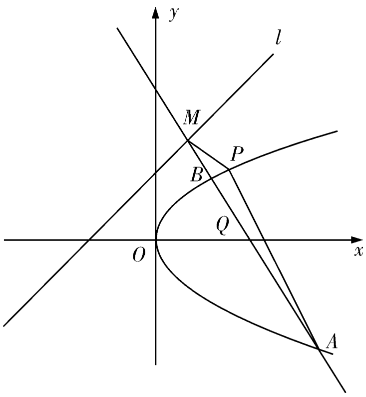
【点评】圆锥曲线中的最值问题类型较多，解法灵活多变，但总体上主要有两种方法：一是利用几何方法，即通过利用曲线的定义、几何性质以及平面几何中的定理、性质等进行求解. 二是利用代数方法，即把要求最值的几何量或代数表达式表示为某个(些)参数的函数(解析式)，然后利用函数方法、不等式方法等进行求解.

探究四　圆锥曲线中的存在性问题

例 6 如图，直线 $l:y=x+b(b>0)$，抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$，已知点 $P(2,2)$在抛物线 C 上，且抛物线 C 上的点到直线 l 的距离的最小值为$\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

(1)求直线 l 及抛物线 C 的方程；

(2)过点 $Q(2,1)$的任一直线(不经过点 P)与抛物线 C 交于 A、B 两点，直线 AB 与直线 l 相交于点 M，记直线 PA，PB，PM 的斜率分别为 k_1，k_2，k_3. 问：是否存在实数 λ，使得 $k_1+k_2=\lambda k_3$？若存在，试求出 λ 的值；若不存在，请说明理由.



【点评】解决存在性问题的解题步骤：第一步：先假设存在，引入参变量，根据题目条件列出关于参变量的方程(组)或不等式(组)；第二步：解此方程(组)或不等式(组)，若有解则存在，若无解则不存在；第三步：得出结论.

规律总结

1. 解答有关轨迹问题时,关键是对图形变化可能性的总体分析,选好相应的解题策略和拟定好具体的方法,将动点的几何特性用数学语言表述. 求轨迹方程常用的方法有:①直译法;②定义法;③代入法;④参数法;⑤交轨法等. 在求轨迹方程问题中易出错的是对轨迹纯粹性及完备性的忽略,因此,在求出曲线的方程后应仔细地检查有无“不法分子”掺杂其中,将其剔除;另一方面又要注意有无“漏网之鱼”逍遥法外,将其捉回. 即整体部分问题探究.

2. 解析几何定值包括几何量的定值和曲线系(直线系)过定点等问题,处理时可以直接计算推理求出定值,也可以先通过特定位置猜测结论后再进行一般性证明. 对于客观试题,通过特值法探求定值更能达到事半功倍的效果.

3. 求解最值问题常用方法是按条件建立目标函数,应用函数思想与方法求得目标函数的最值,同时也要注意运用“数形结合”及“几何法”求解某些最值问题.

4. 对于求曲线方程中参数的取值范围问题,应根据题设条件及曲线的几何性质(曲线的范围、对称性、位置关系等)构造参数满足的不等式,通过解不等式(组)求得参数的取值范围,或建立关于参数的目标函数,转化为函数的值域求解.

5. 存在性问题一般采用“假设反证法”或“假设验证法”来解决. 另外,有一种重要思维方式是解决本类问题的重要方法,即:先用特殊情况或特殊位置得到所求的值,再进行一般性证明.

高考回眸

考题1 [2019·全国卷Ⅲ]双曲线 $C:\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{2}=1$ 的右焦点为 F,点 P 在 C 的一条渐近线上,O 为坐标原点,若 $|PO|=|PF|$,则△PFO 的面积为 ( )

A. $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ B. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

C. $2\sqrt{2}$ D. $3\sqrt{2}$

考题2 [2019·全国卷Ⅱ]已知点 $A(-2,0)$,$B(2,0)$,动点 $M(x,y)$ 满足直线 AM 与 BM 的斜率之积为 $-\frac{1}{2}$. 记 M 的轨迹为曲线 C.

(1)求 C 的方程,并说明 C 是什么曲线;

(2)过坐标原点的直线交 C 于 P,Q 两点,点 P 在第一象限,$PE\perp x$ 轴,垂足为 E,连结 QE 并延长交 C 于点 G.

(Ⅰ)证明:△PQG 是直角三角形;

(Ⅱ)求△PQG 面积的最大值.

温馨提示:请完成考点限时训练(十五)p_{130}