

长郡中学高三停课不停学阶段性检测理科数学试题

一、选择题

1. 已知集合 $A = \{x | x^2 - 2x - 3 \leq 0\}$, $B = \{y | y = 2^x + 1\}$, 则 $A \cap B = ()$

- A. \emptyset B. $(1, 3]$ C. $(0, 3]$ D. $(1, +\infty)$

【答案】B

由已知解得 $A = [-1, 3]$, $B = (1, +\infty)$, 所以 $A \cap B = (1, 3]$, 故选 B.

2. 设 i 为虚数单位, $m \in \mathbb{R}$, “复数 $m(m-1) + i$ 是纯虚数”是“ $m = 1$ ”的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分又不必要条件

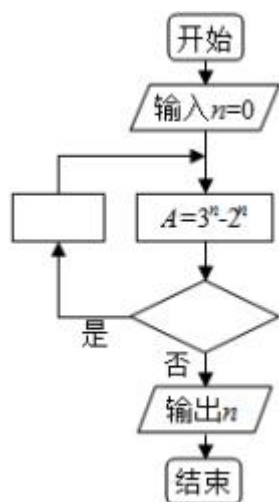
【答案】B

解: 复数 $m(m-1) + i$ 是纯虚数, 则 $m = 0$ 或 $m = 1$,

所以“复数 $m(m-1) + i$ 是纯虚数”不是“ $m = 1$ ”的充分条件;

当 $m = 1$ 时, 复数为 i , 是纯虚数, “复数 $m(m-1) + i$ 是纯虚数”是“ $m = 1$ ”的必要条件, 所以“复数 $m(m-1) + i$ 是纯虚数”是“ $m = 1$ ”的必要不充分条件. 故选 B.

3. 如图程序框图是为了求出满足 $3^n - 2^n > 2020$ 的最小偶数 n , 那么在两个空白框中, 可以分别填入 ()



A. $A > 2020$ 和 $n = n + 1$

B. $A > 2020$ 和 $n = n + 2$

C. $A \leq 2020$ 和 $n = n + 1$

D. $A \leq 2020$ 和 $n = n + 2$

【答案】D

【详解】

因为程序框图为当型循环, 所以当 A 满足条件时, 才会进行循环, 显然不能填 $A > 2020$, 故排除 A, B, 由于要求输出 n 为偶数, 且 n 的起始值为 0, 所以 $n = n + 2$.

4. 已知 $a = 4\ln 3^\pi$, $b = 3\ln 4^\pi$, $c = 4\ln \pi^3$, 则 a, b, c 的大小关系是 ()

- A. $c < b < a$ B. $b < c < a$ C. $b < a < c$ D. $a < b < c$

【答案】B

【详解】

对于 a, b 的大小: $a = 4\ln 3^\pi = \ln 3^{4\pi} = \pi \ln 81$, $b = 3\ln 4^\pi = \ln 4^{3\pi} = \pi \ln 64$, 明显 $a > b$;

对于 a, c 的大小: 构造函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, 则 $f(x)' = \frac{1 - \ln x}{x^2}$,

当 $x \in (0, e)$ 时, $f(x)' > 0$, $f(x)$ 在 $(0, e)$ 上单调递增,

当 $x \in (e, +\infty)$ 时, $f(x)' < 0$, $f(x)$ 在 $(e, +\infty)$ 上单调递减,

$$\because \pi > 3 > e, \therefore f(\pi) < f(3) \text{ 即 } \frac{\ln \pi}{\pi} < \frac{\ln 3}{3}, \therefore 3 \ln \pi < \pi \ln 3, \therefore \ln \pi^3 < \ln 3^\pi, \therefore \pi^3 < 3^\pi \therefore a > c$$

对于 b, c 的大小: $b = 3 \ln 4^\pi = \ln 64^\pi$, $c = 4 \ln \pi^3 = \ln [(\pi)^4]^3$, $64^\pi < [(\pi)^4]^3$, $c > b$

故选 B.

5. 圆周率 π 是一个在数学及物理学中普遍存在的数学常数, 它既常用又神秘, 古今中外很多数学家曾研究它的计算方法. 下面做一个游戏: 让大家各自随意写下两个小于 1 的正数然后请他们各自检查一下, 所得的两数与 1 是否能构成一个锐角三角形的三边, 最后把结论告诉你, 只需将每个人的结论记录下来就能算出圆周率的近似值. 假设有 n 个人说“能”, 而有 m 个人说“不能”, 那么应用你学过的知识可算得圆周率 π 的近似值为 ()

A. $\frac{m}{m+n}$

B. $\frac{n}{m+n}$

C. $\frac{4m}{m+n}$

D. $\frac{4n}{m+n}$

【答案】C

【解析】

把每一个所写两数作为一个点的坐标, 由题意可得与 1 不能构成一个锐角三角形是指两个数

构成点的坐标在圆 $x^2 + y^2 = 1$ 内, 进一步得到 $\frac{\frac{1}{4}\pi \times 1^2}{1 \times 1} = \frac{m}{m+n}$, 则答案可求.

6. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = -2015$, 其前 n 项和为 S_n , 若 $\frac{S_{12}}{12} - \frac{S_{10}}{10} = 2$, 则 $S_{2018} = ()$

A. 2018

B. -2018

C. 4036

D. -4036

【答案】C

【解析】

【分析】

先证明 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 是等差数列, 由此求得数列 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 的首项和公差, 由此求得 $\frac{S_{2018}}{2018}$ 的值, 进而求得 S_{2018} 的值.

【详解】

设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n = An^2 + Bn$, 则 $\frac{S_n}{n} = An + B$,

所以 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 是等差数列. 因为 $\frac{S_{12}}{12} - \frac{S_{10}}{10} = 2$,

所以 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 的公差为 1, 又 $\frac{S_1}{1} = \frac{a_1}{1} = -2015$,

所以 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 是以 -2015 为首项, 1 为公差的等差数列,

所以 $\frac{S_{2018}}{2018} = -2015 + 2017 \times 1 = 2$, 所以 $S_{2018} = 4036$. 故选 C.

【点睛】

本小题主要考查等差数列前 n 项和公式的理解和运用, 考查等差数列基本量的计算, 属于基础题.

7. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 与抛物线 $y^2 = x$ 在第一象限交于点 P , 若抛物线 $y^2 = x$

在点 P 处的切线过双曲线的左焦点 $F(-4, 0)$, 则双曲线的离心率为 ()

A.2

B.4

C. $\frac{\sqrt{17}-1}{4}$ D. $\frac{\sqrt{17}+1}{4}$

【答案】D

【解析】

【分析】

设 $P(m^2, m)$, 求函数导数, 利用导数的几何意义及切线斜率公式建立方程关系求出 $m = 2$, 根据双曲线的定义求出 a, c 即可.

【详解】

设 $P(m^2, m)$, 左焦点 $F(-4, 0)$, 抛物线在第一象限对应的函数为 $f(x) = \sqrt{x} (x > 0)$,

函数的导数 $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, 则在 P 处的切线斜率 $k = f'(m^2) = \frac{1}{2\sqrt{m^2}} = \frac{1}{2m}$,

又切线过焦点, 所以 $\frac{m}{m^2+4} = \frac{1}{2m}$, 解得 $m = 2$, 则 $P(4, 2)$, 设右焦点坐标为 $A(4, 0)$,

则 $2a = |PF| - |PA| = \sqrt{68} - \sqrt{4} = 2(\sqrt{17} - 1)$, 即 $a = \sqrt{17} - 1$,

所以 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{17}+1}{4}$, 故选 D.

【点睛】

本题主要考查了导数的几何意义, 双曲线的定义、离心率, 属于中档题.

8. 已知函数 $f(x)$ 对 $\forall x \in \mathbb{R}$ 满足: $f(x+2) = f(-x)$, $f(x+1) = f(x) \cdot f(x+2)$, 且 $f(x) > 0$, 若 $f(1) = 4$, 则 $f(2019) + f(2020) =$ ()

A. $\frac{3}{4}$

B. 2

C. $\frac{5}{2}$

D. 4

【答案】A

【详解】

因为 $f(x+1) = f(x) \cdot f(x+2)$,

$\therefore f(x+2) = f(x+1) \cdot f(x+3)$, 又 $f(x) > 0$

故 $f(x+3) = \frac{1}{f(x)}$, 即 $f(x+6) = f(x)$

所以函数的周期为 6,

由已知可得

当 $x = 0$ 时, $f(2) = f(0)$, $f(1) = f(0) \cdot f(2)$, 又 $f(x) > 0$,

所以 $f(2) = f(0) = 2$, 并且 $f(3) = \frac{1}{2}$, $f(4) = \frac{1}{4}$, $f(5) = \frac{1}{2}$, $f(6) = 2$,

所以 $f(2019) + f(2020) = f(3) + f(4) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, 故选 A.

9. 已知函数 $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right) (\omega > 0)$, 若 $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$ 上恰有两个零点, 则 ω 的取值范围是 ()

A. $\left(1, \frac{5}{2}\right)$ B. $\left[1, \frac{5}{2}\right)$ C. $\left(\frac{5}{2}, 4\right)$ D. $\left[\frac{5}{2}, 4\right)$

【答案】D

由题 $x \in \left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$, 所以 $\omega x + \frac{\pi}{3} \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\omega\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right]$, 根据 $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$ 上恰有两个零点, 得到 $\frac{2\omega\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \geq$

2π 且 $\frac{2w\pi}{3} + \frac{\pi}{3} < 3\pi$, 即可求解, 得到答案.

10. 在棱长为 1 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 C 关于平面 BDC_1 的对称点为 M , 则 AM 与平面 $ABCD$ 所成角的正切值为

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. 2

【答案】B

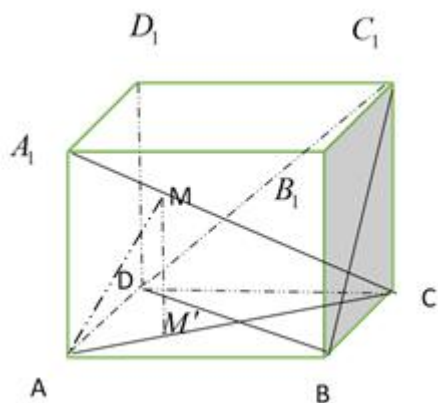
【解析】

【分析】

利用等体积法求得点 C 到平面 BDC_1 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$, 连接 A_1C , 连接 CA , 可证 $A_1C \perp$ 平面 BDC_1 , 由于点 C 关于平面 BDC_1 的对称点为 M , 则点 M 在线段 A_1C 上, 根据线段的比例关系可得 $CM = \frac{2}{3}CA_1$, 从而找出点 M 的位置, 过 M 作 CA 的垂线交 CA 于 M' , 从而可得 $MM' \perp$ 平面 $ABCD$, 所以 AM 与平面 $ABCD$ 所成角为 $\angle MAM'$, 求出其正切值即可得到答案.

【详解】

由题可得 $BD = DC_1 = BC_1 = \sqrt{2}$,



由于 $V_{C-BDC_1} = V_{C_1-DCB}$, 即 $\frac{1}{3}S_{\triangle BDC_1}h = \frac{1}{3}S_{\triangle DBC} \cdot CC_1$, 则 $\frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times (\sqrt{2})^2 h = \frac{1}{3} \times 1 \times \frac{1}{2}$, 解得:

$h = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 所以点 C 到平面 BDC_1 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$,

连接 A_1C , 连接 CA , 由于在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $\begin{cases} DB \perp AC \\ DB \perp AA_1 \\ AC \cap AA_1 = A \end{cases}$, 则 $DB \perp$ 平面 A_1AC ,

所以 $A_1C \perp DB$, 同理可证: $BC_1 \perp$ 平面 A_1B_1C , 得到: $A_1C \perp BC_1$,

则可得: $\begin{cases} A_1C \perp DB \\ A_1C \perp BC_1 \\ DB \cap BC_1 = B \end{cases}$, 故 $A_1C \perp$ 平面 BDC_1

由于点 C 关于平面 BDC_1 的对称点为 M , 则点 M 在线段 A_1C 上,

因为点 C 到平面 BDC_1 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$, 则 $CM = \frac{2\sqrt{3}}{3}$,

在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $A_1C = \sqrt{3}$, 故 $CM = \frac{2}{3}CA_1$,

所以点 M 为 A_1C 的三等分点, 过 M 作 CA 的垂线交 CA 于 M' ,

则 $MM' \parallel A_1A$, $MM' = \frac{2}{3}A_1A = \frac{2}{3}$, $AM' = \frac{1}{3}AC = \frac{\sqrt{2}}{3}$

由于 $A_1A \perp$ 平面 $ABCD$, 则 $MM' \perp$ 平面 $ABCD$,

连接 MA , 则 AM 与平面 $ABCD$ 所成角为 $\angle MAM'$, $\tan \angle MAM' = \frac{MM'}{AM'} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{2}}{3}} = \sqrt{2}$

所以 AM 与平面 $ABCD$ 所成角的正切值为: $\sqrt{2}$

故答案选 B

11. 已知 $f'(x)$ 是奇函数 $f(x)(x \in R)$ 的导函数, $f(2) = 0$, 当 $x \neq 0$ 时, $f'(x) > \frac{2}{x}f(x)$, 则不

等式 $(x-1)f(x) < 0$ 的解集为 ()

A. $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$

B. $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$

C. $(-\infty, -2) \cup (1, 2)$

D. $(-2, 0) \cup (1, 2)$

【答案】D

【详解】

当 $x > 0$ 时, 由 $f'(x) > \frac{2}{x}f(x)$ 得 $f'(x) - \frac{2}{x}f(x) > 0$, 即 $\frac{xf'(x) - 2f(x)}{x} > 0$,

所以 $\frac{x^2f'(x) - 2xf(x)}{x^4} > 0$, 即 $\left(\frac{f(x)}{x^2}\right)' > 0$,

所以令 $g(x) = \frac{f(x)}{x^2}$, 则 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 且 $g(2) = 0$,

又因为 $f(x)$ 是奇函数, 所以 $g(x)$ 也是奇函数,

且在 $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$ 时 $g(x) > 0$, 在 $(-2, +\infty) \cup (0, 2)$ 时 $g(x) < 0$,

又因为 $x^2 > 0$,

所以在 $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$ 时 $f(x) > 0$, 在 $(-2, +\infty) \cup (0, 2)$ 时 $f(x) < 0$

解不等式 $(x-1)f(x) < 0$ 中,

当 $x > 1$ 时, $f(x) < 0$, 所以其解集为 $(1, 2)$;

当 $x < 1$ 时, $f(x) > 0$, 所以其解集为 $(-2, 0)$.

12. 已知数列 1, 1, 2, 1, 2, 4, 1, 2, 4, 8, 1, 2, 4, 8, 16, ..., 其中第一项是 2^0 , 接下来的两项是 $2^0, 2^1$, 再接下来的三项是 $2^0, 2^1, 2^2$, 依此类推, 若该数列前 n 项和 N 满足: ① $N > 80$ ② N 是 2 的整数次幂, 则满足条件的最小的 n 为

A. 21

B. 91

C. 95

D. 10

【答案】C

【详解】

根据题意构造数列 $\{b_m\}$ ($m \in N^*$), 使得: $b_1 = 2^0$, $b_2 = 2^0 + 2^1$, $b_3 = 2^0 + 2^1 + 2^2$, ..., $b_m = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{m-1}$,

故 $b_1 = 2^1 - 1$, $b_2 = 2^2 - 1$, $b_3 = 2^3 - 1$, ..., $b_m = 2^m - 1$, 所以数列 $\{b_m\}$ 的前 m 项和 $T_m =$

$(2^1 - 1) + (2^2 - 1) + (2^3 - 1) + \dots + (2^m - 1) = (2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^m) - m = \frac{2(1-2^m)}{1-2} - m =$

$2^{m+1} - 2 - m$ 令数列 1, 1, 2, 1, 2, 4, 1, 2, 4, 8, 1, 2, 4, 8, 16, ..., 为 $\{a_n\}$,

根据题意可得: $n = 1 + 2 + \dots + m + k = \frac{m(m+1)}{2} + k$, ($0 \leq k < m, k \in N$), 则数列 $\{a_n\}$ 的前

n 项和 $N = T_m + (2^0 + 2^1 + \dots + 2^{k-1}) = 2^{m+1} - 2 - m + 2^k - 1$ ($0 \leq k < m, k \in N$),

所以要使数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和 N 满足: $N > 80$,

由于 N 是 2 的整数次幂, 则 $-2 - m + 2^k - 1 = 0$, 则 $m = 2^k - 3$, 则 $k > 3$,

当 $k = 4$ 时, 则 $-2 - m + 2^4 - 1 = 0$, 解得: $m = 13$, $n = \frac{m(m+1)}{2} + k = \frac{13 \times 14}{2} + 4 = 95$,

故满足条件的最小的 n 为 95,

故答案选 C

二、填空题

13. $(1 + \frac{1}{x^2})(1 + x)^6$ 展开式中 x^2 的系数为_____.

【答案】30

【详解】

由题可得: $(1 + \frac{1}{x^2})(1 + x)^6$ 展开式中 x^2 的系数等于二项式 $(1 + x)^6$ 展开式中 x 的指数为 2 和 4 时的系数之和,

由于二项式 $(1 + x)^6$ 的通项公式为 $T_{r+1} = C_6^r x^r$,

令 $r = 2$, 得 $(1 + x)^6$ 展开式的 x^2 的系数为 $C_6^2 = 15$,

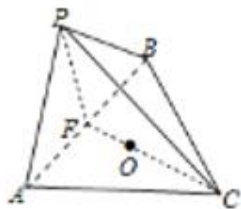
令 $r = 4$, 得 $(1 + x)^6$ 展开式的 x^4 的系数为 $C_6^4 = 15$,

所以 $(1 + \frac{1}{x^2})(1 + x)^6$ 展开式中 x^2 的系数 $15 + 15 = 30$,

14. 在三棱锥 $P - ABC$ 中, 平面 $PAB \perp$ 平面 ABC , $\triangle ABC$ 是边长为 6 的等边三角形, $\triangle PAB$ 是以 AB 为斜边的等腰直角三角形, 则该三棱锥外接球的表面积为_____.

【答案】 48π

【详解】



如图, 在等边三角形 ABC 中, 取 AB 的中点 F ,
设其中心为 O , 由 $AB = 6$,

得 $AO = BO = CO = \frac{2}{3}CF = 2\sqrt{3}$,

$\because \triangle PAB$ 是以 AB 为斜边的等腰角三角形, $\therefore PF \perp AB$,

又因为平面 $PAB \perp$ 平面 ABC ,

$\therefore PF \perp$ 平面 ABC , $\therefore PF \perp OF$,

$OP = \sqrt{OF^2 + PF^2} = 2\sqrt{3}$,

则 O 为棱锥 $P - ABC$ 的外接球球心,

外接球半径 $R = OC = 2\sqrt{3}$,

\therefore 该三棱锥外接球的表面积为 $4\pi \times (2\sqrt{3})^2 = 48\pi$,

故答案为 48π .

15. 将函数 $f(x) = 4\cos(\frac{\pi}{2}x)$ 与直线 $g(x) = x - 1$ 的所有交点从左到右依次记为 A_1, A_2, \dots, A_5 ,

若 P 点坐标为 $(0, \sqrt{3})$, 则 $|\overrightarrow{PA_1} + \overrightarrow{PA_2} + \dots + \overrightarrow{PA_5}| = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】10

【解析】

【分析】

由函数 $f(x) = 4\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ 与直线 $g(x) = x - 1$ 的图象可知, 它们都关于点 $A_3(1, 0)$ 中心对称,

再由向量的加法运算得 $\overrightarrow{PA_1} + \overrightarrow{PA_2} + \dots + \overrightarrow{PA_5} = 5\overrightarrow{PA_3}$, 最后求得向量的模.

【详解】

由函数 $f(x) = 4\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ 与直线 $g(x) = x - 1$ 的图象可知,

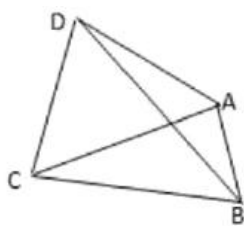
它们都关于点 $A_3(1, 0)$ 中心对称,

所以 $|\overrightarrow{PA_1} + \overrightarrow{PA_2} + \dots + \overrightarrow{PA_5}| = 5|\overrightarrow{PA_3}| = 5\sqrt{(0-1)^2 + (\sqrt{3}-0)^2} = 10$.

【点睛】

本题以三角函数和直线的中心对称为背景, 与平面向量进行交会, 考查运用数形结合思想解决问题的能力.

16. 如图所示, 在平面四边形 $ABCD$ 中, $AB = 1$, $BC = 2$, $\triangle ACD$ 是以 D 为顶点的等腰直角三角形, 则 $\triangle BCD$ 面积的最大值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.



【答案】 $1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$

【详解】

在 $\triangle ABC$ 中, 设 $AC = b$, $\angle ACB = \alpha$, $\angle ABC = \beta$

在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 1$, $BC = 2$, 由余弦定理, 可得 $\cos\alpha = \frac{4+b^2-1}{4b} = \frac{1}{4}\left(b + \frac{3}{b}\right)$,

由 $b + \frac{3}{b} \geq 2\sqrt{b \cdot \frac{3}{b}} = 2\sqrt{3}$, 当且仅当 $b = \sqrt{3}$ 时取等号, 即有 $\cos\alpha \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$, 由于 $\alpha \in (0, \pi)$ 则 $0 <$

$\alpha \leq \frac{\pi}{6}$,

利用余弦定理可得: $AC^2 = BC^2 + AB^2 - 2BC \cdot AB \cos\beta$, 化简得: $b^2 = 5 - 4\cos\beta$,

又因为 $\triangle ACD$ 是以 D 为顶点的等腰直角三角形, 则 $DC^2 = \frac{1}{2}b^2 = \frac{5}{2} - 2\cos\beta$,

在 $\triangle ABC$ 中, 由正弦定理可得: $\frac{b}{\sin\beta} = \frac{AB}{\sin\alpha}$, 即: $b\sin\alpha = \sin\beta$, 则 $CD\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\beta$,

由于 $CD^2\cos^2\alpha = CD^2(1 - \sin^2\alpha)$

$$= CD^2 - CD^2\sin^2\alpha$$

$$= CD^2 - \frac{1}{2}\sin^2\beta$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{5}{2} - 2\cos\beta - \frac{1}{2}\sin^2\beta \\
&= \frac{1}{2}\cos^2\beta - 2\cos\beta + 2 \\
&= \frac{1}{2}(2 - \cos\beta)^2,
\end{aligned}$$

$$\text{即 } CD\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}(2 - \cos\beta)$$

$$\text{所以 } \triangle BCD \text{ 的面积 } S = \frac{1}{2}DC \times 2\sin(\frac{\pi}{4} + \alpha) = DC\sin(\frac{\pi}{4} + \alpha)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{2}}{2}DC\sin\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2}DC\cos\alpha \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}DC\sin\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}(2 - \cos\beta) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\beta + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}(2 - \cos\beta) \\
&= \frac{1}{2}\sin\beta + \frac{1}{2}\cos\beta + 1 \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(\beta + \frac{\pi}{4}) + 1
\end{aligned}$$

当 $\beta = \frac{\pi}{4}$ 时, $\sin(\beta + \frac{\pi}{4})$ 取最大值 1, 所以 $\triangle BCD$ 的面积的最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{2} + 1$

三、解答题

17. 设 $\triangle ABC$ 的内角 A、B、C 的对边长分别为 a、b、c, 设 S 为 $\triangle ABC$ 的面积,

满足 $S = \frac{\sqrt{3}}{4}(a^2 + c^2 - b^2)$.

(I) 求 B;

(II) 若 $b = \sqrt{3}$, 设 $A = x$, $y = (\sqrt{3}-1)a + 2c$, 求函数 $y = f(x)$ 的解析式和最大值.

【答案】(I) $\frac{\pi}{3}$; (II) $y = 2\sqrt{6}\sin(x + \frac{\pi}{4})$ ($0 < x < \frac{2\pi}{3}$), $2\sqrt{6}$.

【解析】

试题分析: (1) 由已知及三角形面积公式和余弦定理得 $\frac{1}{2}ac\sin B = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 2ac\cos B$, 化简后可得

$B = \frac{\pi}{3}$; (2) 由正弦定理得 $a = \frac{b}{\sin B}\sin A = \frac{\sqrt{3}}{\sin \frac{\pi}{3}}\sin x = 2\sin x$, $c = \frac{b}{\sin B}\sin C = 2\sin(\frac{2\pi}{3} - x)$, 所

以 $f(x) = 2\sqrt{6}\sin(x + \frac{\pi}{4})$ ($0 < x < \frac{2\pi}{3}$), 最大值为 $2\sqrt{6}$.

试题解析:

(1) 由已知及三角形面积公式和余弦定理得

$$\frac{1}{2}ac\sin B = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 2ac\cos B$$

$\tan B = \sqrt{3}$, 又 $B \in (0, \pi)$

所以 $B = \frac{\pi}{3}$

(2) 由(1)知 $B = \frac{\pi}{3}$, $\triangle ABC$ 的内角和 $A + B + C = \pi$, 又 $A > 0$, $C > 0$ 得 $0 < A < \frac{2\pi}{3}$

由正弦定理, 知 $a = \frac{b}{\sin B} \sin A = \frac{\sqrt{3}}{\sin \frac{\pi}{3}} \sin x = 2 \sin x$,

$$c = \frac{b}{\sin B} \sin C = 2 \sin(\frac{2\pi}{3} - x)$$

所以 $y = (\sqrt{3}-1)a + 2c$

$$= 2(\sqrt{3}-1) \sin x + 4 \sin(\frac{2\pi}{3} - x)$$

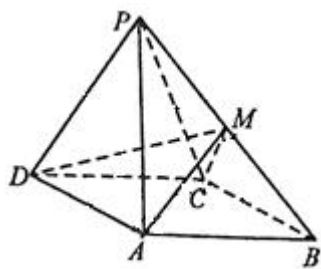
$$= 2\sqrt{3} \sin x + 2\sqrt{3} \cos x$$

$$= 2\sqrt{6} \sin(x + \frac{\pi}{4}) (0 < x < \frac{2\pi}{3})$$

当 $x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, 即 $x = \frac{\pi}{4}$ 时, y 取得最大值 $2\sqrt{6}$

考点: 解三角形.

18. 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是平行四边形, 平面 $PDC \perp$ 平面 $ABCD$, $AC = AD = PD = PC$, $\angle DAC = 90^\circ$, M 在 PB 上.



(1) 若点 M 是 PB 的中点, 求证: $PA \perp$ 平面 CDM ;

(2) 在线段 PB 上确定点 M 的位置, 使得二面角 $D-MC-B$ 的余弦值为 $-\frac{\sqrt{6}}{3}$.

【答案】(1) 证明见解析; (2) 点 M 是 PB 的中点.

【解析】

试题分析: (1) 取 DC 的中点 O , 连接 PO , OA , 先证 $CD \perp$ 平面 POA , 所以 $PA \perp DC$.

再证 $PA \perp CM$, 进而 $PA \perp$ 平面 CDM ; (2) 以 OA, OC, OP 所在直线分别为 x 轴, y 轴,

z 轴建立如图所示空间直角坐标系, 可求得平面 MCB 的法向量, 再设 $\overrightarrow{PM} = \lambda \overrightarrow{PB}$, 可得

$$\overrightarrow{n_2} = (\frac{\lambda-1}{\lambda}, 0, 1),$$

进而利用空间向量加角余弦公式求解.

试题解析: (1) 证明: 取 DC 的中点 O , 连接 PO , OA .

则 $PO \perp DC$, $AO \perp DC$, 又 $PO \cap OA = O$, 从而取 PA 的中点 N , 连接 ON, MN . 由 M 为

PB 中点, 得四边形 $MNOC$ 为平行四边形, 所以 $CM \parallel PA$, 又 $CM \subset$ 平面 CDM , $CD \subset$ 平面 CDM , $CM \cap CD = C$, 所以 $PA \perp$ 平面 CDM .

(2) 解: 由平面 $PDC \perp$ 平面 $ABCD$ 得 $PO \perp$ 平面 $ABCD$, 故以 OA, OC, OP 所在直线分别为 x 轴, y 轴, z 轴建立如图所示空间直角坐标系, 设 $DC = 2$, 由已知得 $D(0, -1, 0)$,

$C(0, 1, 0)$, $B(1, 2, 0)$, $P(0, 0, 1)$, 设平面 MCB 的法向量为 $\vec{n}_1 = (x_1, y_1, 1)$, 由 $\vec{CB} = (1, 1, 0)$, $\vec{CP} = (0, -1, 1)$ 得,

$$\begin{cases} \vec{n}_1 \cdot \vec{CB} = x_1 + y_1 = 0 \\ \vec{n}_1 \cdot \vec{CP} = -y_1 + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ y_1 = 1 \end{cases}, \text{ 则 } \vec{n}_1 = (-1, 1, 1).$$

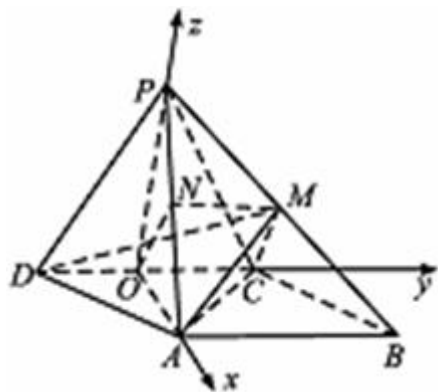
设 $\vec{PM} = \lambda \vec{PB}$ ($0 < \lambda < 1$), 则 $M(\lambda, 2\lambda, 1 - \lambda)$, 从而 $\vec{DC} = (0, 2, 0)$, $\vec{CM} = (\lambda, 2\lambda - 1, 1 - \lambda)$,

设平面 DCM 的法向量为 $\vec{n}_2 = (x_2, y_2, 1)$, 则由 $\begin{cases} \vec{n}_2 \cdot \vec{DC} = 2y_2 = 0 \\ \vec{n}_2 \cdot \vec{CM} = \lambda x_2 + (2\lambda - 1)y_2 + 1 - \lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\lambda-1}{\lambda} \\ y_1 = 0 \end{cases},$$

则 $\vec{n}_2 = (\frac{\lambda-1}{\lambda}, 0, 1)$, 所以 $|\cos \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle| = \left| \frac{\frac{\lambda-1}{\lambda} + 1}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{(\frac{\lambda-1}{\lambda})^2 + 1}} \right| = \frac{\sqrt{6}}{3}$, 解得 $\lambda = \frac{1}{2}$. 故当点 M 是 PB 的中

点时, 二面角 $D-MC-B$ 的余弦值为 $-\frac{\sqrt{6}}{3}$.



考点: 1、线面垂直的判定定理; 2、空间向量加角余弦公式.

19. 已知点 P 到直线 $y = -3$ 的距离比点 P 到点 $A(0, 1)$ 的距离多 2.

(1) 求点 P 的轨迹方程;

(2) 经过点 $Q(0, 2)$ 的动直线 l 与点 P 的轨迹交于 M, N 两点, 是否存在定点 R 使得 $\angle MRQ = \angle NRQ$? 若存在, 求出点 R 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

【答案】(1) $x^2 = 4y$ (2) 存在满足条件的定点 $R(0, -2)$, 详见解析

【解析】

【分析】

(1) 根据抛物线的定义可得解;

(2) 将角的相等关系转化到直线的斜率的关系, 进而转化到交点的坐标的关系求解.

【详解】

(1) 由题知, $|PA|$ = 点 P 到直线 $y = -1$ 的距离,
故 P 点的轨迹是以 A 为焦点、 $y = -1$ 为准线的抛物线,
所以其方程为 $x^2 = 4y$;

(2) 根据图形的对称性知, 若存在满足条件的定点 R , 则点 R 必在 y 轴上, 可设其坐标为 $(0, r)$.

此时 $\angle MRQ = \angle NRQ \Leftrightarrow k_{MR} + k_{NR} = 0$,

设 $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$, 则 $\frac{y_1 - r}{x_1} + \frac{y_2 - r}{x_2} = 0$,

由题知直线 l 的斜率存在, 设其方程为 $y = kx + 2$, 与 $x^2 = 4y$ 联立得 $x^2 - 4kx - 8 = 0$,
则 $x_1 + x_2 = 4k$, $x_1 x_2 = -8$,

$$\frac{y_1 - r}{x_1} + \frac{y_2 - r}{x_2} = \frac{kx_1 + 2 - r}{x_1} + \frac{kx_2 + 2 - r}{x_2} = 2k + \frac{(2-r)(x_1 + x_2)}{x_1 x_2} = 2k - \frac{k(2-r)}{2} = 0,$$

故 $r = -2$, 即存在满足条件的定点 $R(0, -2)$.

【点睛】

本题考查抛物线的定义和直线与抛物线的关系, 对于第二小问是常规题, 转化成坐标的关系是关键, 并且能最终转化成与韦达定理的关系, 属于中档题.

20. 武汉又称江城, 是湖北省省会城市, 被誉为中部地区中心城市, 它不仅有着深厚的历史积淀与丰富的民俗文化, 更有着众多名胜古迹与旅游景点, 每年来武汉参观旅游的人数不胜数, 其中黄鹤楼与东湖被称为两张名片为合理配置旅游资源, 现对已游览黄鹤楼景点的游客进行随机问卷调查, 若不游玩东湖记 1 分, 若继续游玩东湖记 2 分, 每位游客选择是否游览东湖景点的概率均为 $\frac{1}{2}$, 游客之间选择意愿相互独立.

(1) 从游客中随机抽取 3 人, 记总得分为随机变量 X , 求 X 的分布列与数学期望;

(2) (i) 若从游客中随机抽取 m 人, 记总分恰为 m 分的概率为 A_m , 求数列 $\{A_m\}$ 的前 10 项和;

(ii) 在对所有游客进行随机问卷调查过程中, 记已调查过的累计得分恰为 n 分的概率为 B_n , 探讨 B_n 与 B_{n-1} 之间的关系, 并求数列 $\{B_n\}$ 的通项公式.

【答案】(1) 见解析 (2) (i) $\frac{1023}{1024}$ (ii) $B_n - \frac{2}{3} = -\frac{1}{2} \left(B_{n-1} - \frac{2}{3} \right)$, $B_n = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2} \right)^n$

【解析】

【分析】

(1) 判断出 X 可能取值为 3, 4, 5, 6, 分别求出概率, 进而求出其数学期望.

(2) (i) 由题可得首项为 $\frac{1}{2}$, 公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列, 并求其前 10 项和. (ii) 根据 B_n 与 B_{n-1}

之间的关系 $1 - B_n = \frac{1}{2} B_{n-1}$, 用待定系数法得 $B_n - \frac{2}{3} = -\frac{1}{2} \left(B_{n-1} - \frac{2}{3} \right)$, 进一步就可求出 $\{B_n\}$ 的通项公式.

【详解】

解: (1) X 可能取值为 3, 4, 5, 6.

$$P(X=3) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}, P(X=4) = C_3^1 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8}, P(X=5) = C_3^2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8}, P(X=6) = C_3^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 =$$

$$\frac{1}{8}.$$

$\therefore X$ 的分布列为

X	3	4	5	6
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$$\therefore EX = 3 \times \frac{1}{8} + 4 \times \frac{3}{8} + 5 \times \frac{3}{8} + 6 \times \frac{1}{8} = 4.5$$

(2) (i) 总分恰为 m 分的概率为 $A_m = \left(\frac{1}{2}\right)^m$,

\therefore 数列 $\{A_m\}$ 是首项为 $\frac{1}{2}$, 公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列,

$$\text{前 10 项和 } S_{10} = \frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2^{10}})}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1023}{1024}.$$

(ii) 已调查过的累计得分恰为 n 分的概率为 B_n , 得不到 n 分的情况只有先得 $n-1$ 分, 再得 2

分, 概率为 $\frac{1}{2}B_{n-1}$, $B_1 = \frac{1}{2}$.

所以 $1 - B_n = \frac{1}{2}B_{n-1}$, 即 $B_n = -\frac{1}{2}B_{n-1} + 1$

$$\therefore B_n - \frac{2}{3} = -\frac{1}{2}\left(B_{n-1} - \frac{2}{3}\right).$$

$$\therefore B_n - \frac{2}{3} = \left(B_1 - \frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1},$$

$$\therefore B_n = \frac{2}{3} - \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

【点睛】

本题是一道数列与概率的综合问题, 对于递推式 $B_n = -\frac{1}{2}B_{n-1} + 1$, 可通过待定系数法求 $\{B_n\}$ 的通项公式, 是一道中等难度的题目.

21. 已知 $a \in R$, 函数 $f(x) = x^2 - (2a+2)x + 2a\ln x + 5$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 设函数 $g(x) = 2\ln x - \frac{1}{2}x^2 + x + m$, 若 $f(x)$ 恰有两个零点 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$, 且当 $x_1 < x < x_2$ 时, $f(x) < 0 < g(x)$, 求实数 m 的取值范围.

【答案】(1) 答案不唯一, 具体见解析 (2) $m \geq -\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】

(1) 对函数求导函数后, 讨论参数的范围使之能判断导函数的符号, 从而得原函数的单调性;

(2) 由(1)得两个零点的范围, 从而得参数的范围, 建立不等式求解.

【详解】

解析: (1) $f'(x) = 2x - (2a + 2) + \frac{2a}{x} = \frac{2(x-1)(x-a)}{x}$, $\because x > 0$, 故

当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单减, 在 $(1, +\infty)$ 上单增;

当 $0 < a < 1$ 时, $f(x)$ 在 $(0,a)$ 和 $(1, +\infty)$ 上单增, 在 $(a,1)$ 上单减;

当 $a = 1$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单增;

当 $a > 1$ 时, $f(x)$ 在 $(0,1)$ 和 $(a, +\infty)$ 上单增, 在 $(1,a)$ 上单减;

(2) 结合 (1) 知 $a \neq 1$;

当 $a \leq 0$ 时, $f(1) = 4 - 2a > 0$, 故 $f(x) > 0$, 不存在零点;

又当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) \rightarrow -\infty$, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \rightarrow +\infty$, 当 $0 < a < 1$ 时, $f(1) = 4 - 2a > 0$, $\therefore f(x)$ 只有一个零点;

故 $a > 1$,

此时 $f(x)$ 存在两个零点且当 $x_1 < x < x_2$ 时 $f(x) < 0 \Leftrightarrow f(1) = 0$ 即 $a = 2$,

此时 $x_1 = 1$, $x_2 > 2$, $g'(x) = \frac{2}{x} - x + 1 = \frac{(2-x)(x+1)}{x}$, $g(x)$ 在 $[1,2)$ 上单增, $(2,x_2]$ 上单减,

而 $g(x_2) - g(1) = 2\ln x_2 - \frac{1}{2}x_2^2 + x_2 - \frac{1}{2}$ ①, 又 $x_2^2 - 6x_2 + 4\ln x_2 + 5 = 0$, 代入①式得

$g(x_2) - g(1) = -x_2^2 + 4x_2 - 3 = (1-x_2)(x_2-3)$,

又 $f(3) = 4\ln 3 - 4 > 0$, 故 $x_2 \in (2,3)$,

$\therefore g(x_2) - g(1) > 0$ 即 $g(x_2) > g(1)$,

$\therefore g(1) \geq 0$ 即可, $\therefore m \geq -\frac{1}{2}$.

【点睛】

本题考查根据导函数的正负研究原函数的图像趋势, 进而解决相关的零点、不等式恒成立或满足不等式求解参数的范围等问题, 属于难度题.

请考生从第 (22)、(23) 两题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一个题目计分.

22. 曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = \frac{1}{2}\cos\varphi \\ y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin\varphi \end{cases}$ (φ 为参数), 以原点 O 为极点, x 轴的正半轴为极

轴的极坐标系中, 曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho\cos^2\theta = 3\sin\theta$.

(1) 求曲线 C_1 的极坐标方程和曲线 C_2 的直角坐标方程;

(2) 若直线 $l: y = kx$ 与曲线 C_1, C_2 的交点分别为 A, B (A, B 异于原点), 当斜率 $k \in [\frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}]$

时, 求 $|OA| + \frac{1}{|OB|}$ 的最小值.

【答案】(1) C_1 的极坐标方程为 $\rho = \sin\theta$; 曲线 C_2 的直角坐标方程 $x^2 = 3y$. (2) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

【解析】

【分析】

(1) 消去参数, 可得曲线 C_1 的直角坐标方程 $x^2 + y^2 - y = 0$, 再利用极坐标与直角坐标的互化, 即可求解.

(2) 解法 1: 设直线 l 的倾斜角为 α , 把直线 l 的参数方程代入曲线 C_1 的普通坐标方程, 求得

$|OA| = |t_2|$ ，再把直线 l 的参数方程代入曲线 C_2 的普通坐标方程，得 $|OB| = |t_2|$ ，得出 $|OA| + \frac{1}{|OB|} = \sin\alpha + \frac{\cos^2\alpha}{3\sin\alpha}$ ，利用基本不等式，即可求解；

解法 2：设直线 l 的极坐标方程为 $\theta = \alpha$ ，分别代入曲线 C_1, C_2 的极坐标方程，得 $|OA| = \sin\alpha$ ， $|OB| = \frac{3\sin\alpha}{\cos^2\alpha}$ ，得出 $|OA| + \frac{1}{|OB|} = \sin\alpha + \frac{\cos^2\alpha}{3\sin\alpha}$ ，即可基本不等式，即可求解。

【详解】

(1) 由题曲线的参数方程为 $\begin{cases} x = \frac{1}{2}\cos\varphi \\ y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin\varphi \end{cases}$ (φ 为参数)，消去参数，

可得曲线 C_1 的直角坐标方程为 $x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$ ，即 $x^2 + y^2 - y = 0$ ，

则曲线 C_1 的极坐标方程为 $\rho^2 - \rho\sin\theta = 0$ ，即 $\rho = \sin\theta$ ，

又因为曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho\cos^2\theta = 3\sin\theta$ ，即 $\rho^2\cos^2\theta = 3\rho\sin\theta$ ，

根据 $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$ ，代入即可求解曲线 C_2 的直角坐标方程 $x^2 = 3y$ 。

(2) 解法 1：设直线 l 的倾斜角为 α ，

则直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = t\cos\alpha \\ y = t\sin\alpha \end{cases}$ (α 为参数， $\frac{\pi}{6} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{3}$)，

把直线 l 的参数方程代入曲线 C_1 的普通坐标方程得： $t^2 - t\sin\alpha = 0$ ，

解得 $t_1 = 0$ ， $t_2 = \sin\alpha$ ， $\therefore |OA| = |t_2| = \sin\alpha$ ，

把直线 l 的参数方程代入曲线 C_2 的普通坐标方程得： $t^2\cos^2\alpha = 3t\sin\alpha$ ，

解得 $t_1 = 0$ ， $t_2 = \frac{3\sin\alpha}{\cos^2\alpha}$ ， $\therefore |OB| = |t_2| = \frac{3\sin\alpha}{\cos^2\alpha}$ ，

$\therefore |OA| + \frac{1}{|OB|} = \sin\alpha + \frac{\cos^2\alpha}{3\sin\alpha} = \frac{1}{3}(\frac{1}{\sin\alpha} + 2\sin\alpha)$ ，

$\because k \in [\frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}]$ ，即 $\tan\alpha \in [\frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}]$ ， $\therefore \frac{\pi}{6} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{3}$ ， $\therefore \frac{1}{2} \leq \sin\alpha \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，

$\therefore \frac{1}{\sin\alpha} + 2\sin\alpha \geq 2\sqrt{\frac{1}{\sin\alpha} \cdot 2\sin\alpha} = 2\sqrt{2}$ ，

当且仅当 $\frac{1}{\sin\alpha} = 2\sin\alpha$ ，即 $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时取等号，

故 $|OA| + \frac{1}{|OB|}$ 的最小值为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 。

解法 2：设直线 l 的极坐标方程为 $\theta = \alpha$ ($\frac{\pi}{6} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{3}$)，

代入曲线 C_1 的极坐标方程，得 $\rho = \sin\alpha$ ， $\therefore |OA| = \rho = \sin\alpha$ ，

把直线 l 的参数方程代入曲线 C_2 的极坐标方程得： $\rho\cos^2\theta = 3\sin\alpha$ ，

$\therefore \rho = \frac{3\sin\alpha}{\cos^2\alpha}$ ，即 $|OB| = \rho = \frac{3\sin\alpha}{\cos^2\alpha}$ ， $\therefore |OA| + \frac{1}{|OB|} = \sin\alpha + \frac{\cos^2\alpha}{3\sin\alpha} = \frac{1}{3}(\frac{1}{\sin\alpha} + 2\sin\alpha)$ ，

曲线 C_1 的参 $\because k \in [\frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}]$ ，即 $\tan\alpha \in [\frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}]$ ，

$\therefore \frac{\pi}{6} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{3}$ ， $\therefore \frac{1}{2} \leq \sin\alpha \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ ， $\therefore \frac{1}{\sin\alpha} + 2\sin\alpha \geq 2\sqrt{\frac{1}{\sin\alpha} \cdot 2\sin\alpha} = 2\sqrt{2}$ ，

当且仅当 $\frac{1}{\sin\alpha} = 2\sin\alpha$, 即 $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时取等号,

故 $|OA| + \frac{1}{|OB|}$ 的最小值为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

【点睛】

本题主要考查了参数方程与普通方程, 以及极坐标方程与直角坐标方程点互化, 以及直线参数方程的应用和极坐标方程的应用, 其中解答中熟记互化公式, 合理应用直线的参数方程中参数的几何意义是解答的关键, 着重考查了推理与运算能力, 属于基础题.

23. 已知函数 $f(x) = |2x - 1| + |x + 1|$.

(1) 求不等式 $f(x) < x + 2$ 的解集;

(2) 设 $a, b, c \in \mathbb{R}$, 若 $(a + 1)^2 + (b - 2)^2 + c^2 \leq f(x)$ 对任意 $x \in \mathbb{R}$ 成立, 求 $a - b + c$ 的最大值.

【答案】(1) $x \in (0, 1)$ (2) $\frac{3\sqrt{2}}{2} - 3$

【解析】

【分析】

(1) 根据对含两个绝对值符号的三段式讨论化简函数表达式求解不等式;

(2) 构造柯西不等式求最值.

【详解】

$$\text{解析: (1) } f(x) = \begin{cases} 3x, & x \geq \frac{1}{2} \\ 2 - x, & -1 < x < \frac{1}{2} \\ -3x, & x \leq -1 \end{cases}$$

当 $x \geq \frac{1}{2}$ 时, $3x < x + 2$ 即 $x < 1$, $\therefore \frac{1}{2} \leq x < 1$;

当 $-1 < x < \frac{1}{2}$ 时, $2 - x < x + 2$ 即 $x > 0$, $\therefore 0 < x < \frac{1}{2}$;

当 $x \leq -1$ 时, $-3x < x + 2$ 即 $x > -\frac{1}{2}$, 无解;

综上, $x \in (0, 1)$;

(2) 由 (1) 知, 当 $x = \frac{1}{2}$ 时, $f(x)$ 取到最小值 $\frac{3}{2}$, 故 $(a + 1)^2 + (b - 2)^2 + c^2 \leq f(x)$ 对任意 $x \in \mathbb{R}$ 成立,

即 $(a + 1)^2 + (b - 2)^2 + c^2 \leq \frac{3}{2}$,

由柯西不等式知 $[(a + 1)^2 + (b - 2)^2 + c^2](1 + 1 + 1) \geq (a + 1 + 2 - b + c)^2$,

当且仅当 $a + 1 = 2 - b = c$ 时等号成立,

$\therefore (a - b + c + 3)^2 \leq \frac{9}{2}$, 即 $-\frac{3\sqrt{2}}{2} - 3 \leq a - b + c \leq \frac{3\sqrt{2}}{2} - 3$,

当 $a = \frac{\sqrt{2}}{2} - 1$, $b = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$, $c = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, 右边等号成立, $\therefore a - b + c$ 的最大值为 $\frac{3\sqrt{2}}{2} - 3$.

【点睛】

本题考查含两个绝对值符号的讨论方法和构造柯西不等式，属于中档题.