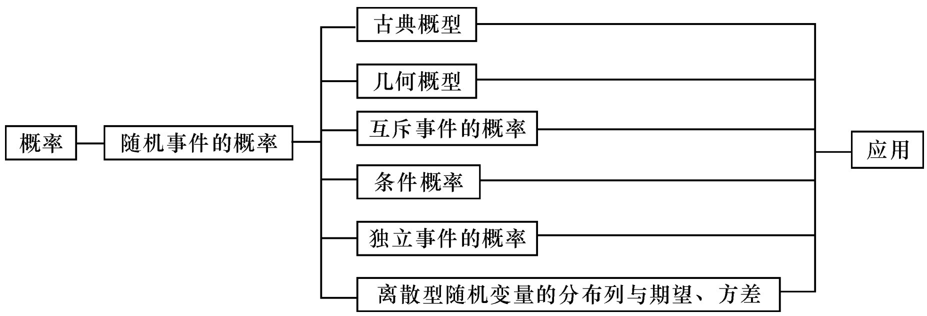
第 17 讲　概率、离散型随机变量及其分布、期望、方差

知 识 网 络



考情分析

年份	卷别	题号	考查内容	命题规律
2019	Ⅰ	6,15,21	古典概型与数学文化;独立重复实验;随机变量的分布列、数学期望	在独立重复试验中,求随机事件发生的概率或抽样方法、统计信息; 题型 1:求无放回抽取的一个或几个事件发生的概率; 题型 2:求有放回抽取的一个或几个事件发生的概率.
	Ⅱ	18	二项分布及其概率的计算	
2018	Ⅰ	10,20	几何概型;概率与频率的关系、二项分布、导数的应用数学期望、概率的意义及其应用	
	Ⅱ	8	古典概型与数学文化	
	Ⅲ	8	二项分布及其方差的计算	
2017	Ⅰ	2	几何概型	
	Ⅱ	13	二项分布及其方差	
	Ⅲ	18	频率分布表、随机变量的分布列、数学期望	

备考建议

1. 本节内容概念性强,抽象性强,思维方法新颖,因此复习时要注意:①要读懂题意,明确解题的突破口,选择合理简洁的标准研究事件;②要牢记古典概型和几何概型的公式及其应用.

2. 离散型随机变量问题的核心是概率计算,而概率计算又以事件的独立性、互斥性、对立性为核心,故在解题中要充分细致的分析事件之间的关系.

3. 概率求解问题是极易出现错误的一个考点. 备考中要避免以下六种常见的错误:事件不清(指对所求概率的事件混淆,没有理解各类事件的本质,匆匆解答中导致出错);事件不“全”(对所求概率的事件的各方面考虑不全或遗漏或增解导致出错);审题不“力”(没有理解题目意思,或没有弄清出题者的意图,匆匆作答,掉入出题者设计好的“陷阱”之中,导致出错);模型不“熟”(在做题时,没有很好地总结题型特点,使之“模型”化,或对一些常见“模型”掌握不熟悉,不能“对号入座”,以致在解题时思路不畅,走弯路,导致出错);方法不“当”(没有选择好解题的适当方法,导致出错);联系不“畅”(没有与其他的知识联系起来思考题目,孤立做概率题使解题无法进行甚至解错).

典例剖析

探究一　古典概型与几何概型

例 1 (1)从个位数与十位数之和为奇数的两位数中任取一个,其个位数为 0 的概率是　(　　)

A. $\frac{4}{9}$　B. $\frac{1}{3}$　C. $\frac{2}{9}$　D. $\frac{1}{9}$

(2)设复数 $z=x-1+yi(x,y\in\mathbf{R})$,若 $|z|\leqslant 1$,则 $y\geqslant x$ 的概率为　(　　)

A. $\frac{3}{4}+\frac{1}{2\pi}$　　B. $\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}$

C. $\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}$　　D. $\frac{1}{4}-\frac{1}{2\pi}$

(3)节日前夕,小李在家门前的树上挂了两串彩灯,这两串彩灯的第一次闪亮相互独立,且都在通电后的 4 秒内任一时刻等可能发生,然后每串彩灯以 4 秒为间隔闪亮,那么这两串彩灯同时通电后,它们第一次闪亮的时刻相差不超过 2 秒的概率是　　(　　)

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{3}{4}$　　D. $\frac{7}{8}$

例 2 已知关于 x 的一元二次方程 $9x^2+6ax-b^2+4=0$,$a,b\in\mathbf{R}$.

(1)若 a 是从 1,2,3 三个数中任取的一个数,b 是从 0,1,2 三个数中任取的一个数,求已知方程有两个不相等实根的概率;

(2)若 a 是从区间$[0,3]$内任取的一个数,b 是从区间$[0,2]$内任取的一个数,求已知方程有实数根的概率.

【点评】事件个数有限即古典概型,其概率计算通常要应用排列与组合知识;事件涉及某类区域,通常是几何概型,其概率计算为“同类区域”的商.

探究二　互斥事件、相互独立事件的概率

例 3 某学校举行知识竞赛,第一轮选拔共设有 1,2,3 三个问题,每位参赛者按问题 1,2,3 的顺序做答,竞赛规则如下:

①每位参赛者计分器的初始分均为 10 分,答对问题 1,2,3 分别加 1 分,2 分,3 分,答错任一题减 2 分;

②每回答一题,计分器显示累计分数,当累计分数小于 8 分时,答题结束,淘汰出局;当累计分数大于或等于 12 分时,答题结束,进入下一轮;当答完三题,累计分数仍不足 12 分时,答题结束,淘汰出局.

已知甲同学回答 1,2,3 三个问题正确的概率依次为$\frac{3}{4}$,$\frac{1}{2}$,$\frac{1}{3}$,且各题回答正确与否相互之间没有影响.

(1)求甲同学能进入下一轮的概率;

(2)用 X 表示甲同学本轮答题结束时的累计分数,求 X 的分布列和数学期望.

【点评】在解含有相互独立事件的概率题时,首先把所求的随机事件分拆成若干个互斥事件的和,其次将分拆后的每个事件分拆为若干个相互独立事件的乘积.

探究三　二项分布

例 4 某工厂的某种产品成箱包装，每箱 200 件，每一箱产品在交付用户之前要对产品作检验，如检验出不合格品，则更换为合格品. 检验时，先从这箱产品中任取 20 件作检验，再根据检验结果决定是否对余下的所有产品作检验. 设每件产品为不合格品的概率都为 $p(0<p<1)$，且各件产品是否为不合格品相互独立.

(1)记 20 件产品中恰有 2 件不合格品的概率为 $f(p)$，求 $f(p)$的最大值点 p_0；

(2)现对一箱产品检验了 20 件，结果恰有 2 件不合格品，以(1)中确定的 p_0 作为 p 的值. 已知每件产品的检验费用为 2 元，若有不合格品进入用户手中，则工厂要对每件不合格品支付 25 元的赔偿费用.

①若不对该箱余下的产品作检验，这一箱产品的检验费用与赔偿费用的和记为 X，求 EX；

②以检验费用与赔偿费用和的期望值为决策依据，是否该对这箱余下的所有产品作检验？

【点评】二项分布相应的试验为独立重复试验，审题时应思考试验模式是否具有独立重复试验特征，若具有则相应的分布为二项分布，由此可简化解答过程.

探究四　超几何分布

例 5 在心理学研究中，常采用对比试验的方法评价不同心理暗示对人的影响，具体方法如下：将参加试验的志愿者随机分成两组，一组接受甲种心理暗示，另一组接受乙种心理暗示，通过对比这两组志愿者接受心理暗示后的结果来评价两种心理暗示的作用. 现有 6 名男志愿者 A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6 和 4 名女志愿者 B_1,B_2,B_3,B_4，从中随机抽取 5 人接受甲种心理暗示，另 5 人接受乙种心理暗示.

(1)求接受甲种心理暗示的志愿者中包含 A_1 但不包含 B_1 的概率；

(2)用 X 表示接受乙种心理暗示的女志愿者人数，求 X 的分布列与数学期望 EX.

【点评】超几何分布的题设情境特征是总体可划分为二类，所求分布的随机变量是由其中的一类所抽取的元素个数的变化而确定的，在整体抽取时，已知该类元素抽取了多少，但不知道是第几次抽到.

探究五　离散型随机变量的分布列、期望、方差

例 6 一批产品需要进行质量检验,检验方案是:先从这批产品中任取 4 件作检验,这 4 件产品中优质品的件数记为 n. 如果 $n=3$,再从这批产品中任取 4 件作检验,若都为优质品,则这批产品通过检验;如果 $n=4$,再从这批产品中任取 1 件作检验,若为优质品,则这批产品通过检验;其他情况下,这批产品都不能通过检验.

假设这批产品的优质品率为 50%,即取出的产品是优质品的概率都为 $\frac{1}{2}$,且各件产品是否为优质品相互独立.

(1)求这批产品通过检验的概率;

(2)已知每件产品检验费用为 100 元,凡抽取的每件产品都需要检验,对这批产品作质量检验所需的费用记为 X(单位:元),求 X 的分布列及数学期望.

【点评】离散型随机变量的分布列的求解,一般分两步:一是定型,即先判断随机变量的分布是特殊类型还是一般类型,如两点分布、二项分布、超几何分布等属于特殊类型;二是定性,对于两点分布、二项分布、超几何分布等特殊分布的分布列可以直接代入相应的公式求解,而对于分布为一般类型的随机变量,应根据相关知识逐步求解随机变量对应事件的概率.

例 7 某超市为了解顾客的购物量及结算时间等信息,安排一名员工随机收集了在该超市购物的 100 位顾客的相关数据,如下表所示.

一次购物量	1 至 4 件	5 至 8 件	9 至 12 件	13 至 16 件	17 件及以上
顾客数(人)	x	30	25	y	10
结算时间(分钟/人)	1	1.5	2	2.5	3

已知这 100 位顾客中一次购物量超过 8 件的顾客占 55%.

(1)确定 x,y 的值,并求顾客一次购物的结算时间 X 的分布列与数学期望;

(2)若某顾客到达收银台时前面恰有 2 位顾客需结算,且各顾客的结算相互独立,求该顾客结算前的等候时间不超过 2.5 分钟的概率.

(注:将频率视为概率)

规律总结

1. 在求解含有相互独立事件概率题时，首先把所求的随机事件分拆成若干个互斥事件的和，其次将分拆后的每个事件分拆为若干个相互独立事件的乘积，接下来就是按照相关的概率值进行计算，如果某些相互独立事件符合独立重复试验概型，就把这部分归结为独立重复试验概型，用独立重复试验概型的概率计算公式解答. 独立重复试验是相互独立事件的特例，只要有“恰好”、“恰有”字样的，用独立重复试验的概率公式计算更为简单.

2. 概率应用题多是由掷硬币、掷骰子、摸球等概率模型赋予实际背景后得出来的，在解题时就要把实际问题再还原为常见的一些概率模型，这就要根据问题的具体情况去分析，对照常见的概率模型，把不影响问题本质的因素去除，抓住问题的本质去解题.

3. (1)求解一般的随机变量的期望和方差的基本方法是：先根据随机变量的意义，确定随机变量可以取哪些值，然后根据随机变量取这些值的意义求出取这些值的概率，列出分布列，根据数学期望和方差的公式计算.

(2)求离散型随机变量的数学期望的一般步骤为：

第一步是“判断取值”，即判断随机变量的所有可能取值，以及取每个值所表示的意义；

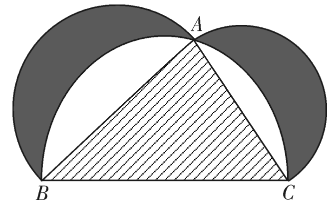
第二步是“探求概率”，即利用排列组合、枚举法、概率公式(常见的有古典概型公式、几何概型公式、互斥事件的概率和公式、独立事件的概率积公式，以及对立事件的概率公式)等，求出随机变量取每个值时的概率；

第三步是“写分布列”，即按规范形式写出分布列，并注意用分布列的性质检验所求的分布列或某事件的概率是否正确；

第四步是“求期望值”，一般利用离散型随机变量的数学期望的定义求期望，对于有些实际问题中的随机变量，如果能够断定它服从某常见的典型分布(如二项分布 $X\sim B(n,p)$)，则此随机变量的期望可直接利用这种典型分布的期望公式($E(X)=np$)求得. 因此，应熟记常见的典型分布的期望公式，可加快解题速度.

高考回眸

考题1［2018·全国卷Ⅰ］如图来自古希腊数学家希波克拉底所研究的几何图形. 此图由三个半圆构成，三个半圆的直径分别为直角三角形 ABC 的斜边 BC，直角边 AB，AC. $\triangle ABC$ 的三边所围成的区域记为Ⅰ，黑色部分记为Ⅱ，其余部分记为Ⅲ. 在整个图形中随机取一点，此点取自Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ的概率分别为 p_1，p_2，p_3，则（　　）



A. $p_1=p_2$　　B. $p_1=p_3$

C. $p_2=p_3$　　D. $p_1=p_2+p_3$

考题2［2019·天津卷］设甲、乙两位同学上学期间，每天 7:30 之前到校的概率均为 $\frac{2}{3}$. 假定甲、乙两位同学到校情况互不影响，且任一同学每天到校情况相互独立.

(1)用 X 表示甲同学上学期间的三天中 7:30 之前到校的天数，求随机变量 X 的分布列和数学期望；

(2)设 M 为事件“上学期间的三天中，甲同学在7:30 之前到校的天数比乙同学在 7:30 之前到校的天数恰好多 2”，求事件 M 发生的概率.

温馨提示：请完成考点限时训练(十七)p_{136}