

# 文科数学试卷

一、选择题：本大题共 12 个小题,每小题 5 分,共 60 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1.已知集合  $M = \{x \mid |x| \geq 1\}$ ,  $N = \{x \mid 2^{x-1} < 1\}$ , 则  $M \cap N = ( \quad )$

- A.  $\{x \mid x \leq -1\}$       B.  $\{x \mid x \leq 1\}$       C.  $\{x \mid -1 \leq x \leq 1\}$       D.  $\{x \mid x < 1\}$

2.复数  $z = \frac{2i}{1-i}$  的共轭复数为 ( )

- A.  $-1-i$       B.  $-1+i$       C.  $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$       D.  $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

3.已知向量  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  为单位向量,若  $(\sqrt{2}\vec{e}_1 - \vec{e}_2) \perp (\sqrt{2}\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2)$ , 则向量  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  的夹角大小为 ( )

- A. 0      B.  $\frac{\pi}{4}$       C.  $\frac{\pi}{2}$       D.  $\pi$

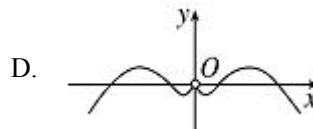
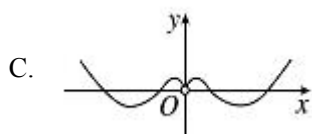
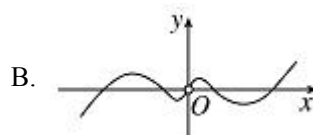
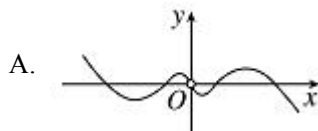
4.若  $\frac{\cos \alpha}{\tan \alpha} = \frac{8}{3}$ , 则  $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = ( \quad )$

- A.  $-\frac{1}{3}$       B.  $\frac{1}{3}$       C.  $\frac{2\sqrt{2}}{3}$       D.  $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

5.若  $P$  是圆  $C: (x+3)^2 + (y-3)^2 = 1$  上任一点, 则点  $P$  到直线  $y = kx - 1$  距离的最大值为 ( )

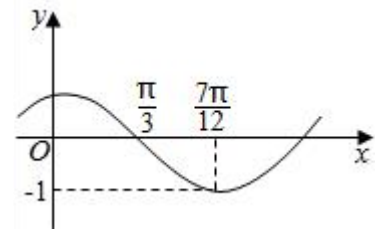
- A.  $\sqrt{10} + 1$       B.  $3\sqrt{2} + 1$       C. 8      D. 6

6.函数  $f(x) = \sin x \cdot \ln|x|$  的部分图像是 ( )



7. 函数  $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$  (其中  $A > 0$ ,  $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$ ) 的图象如图所示,

为了得到  $g(x) = \cos \omega x$  的图象, 则只要将  $f(x)$  的图象( )

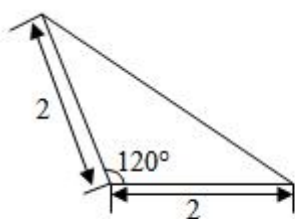


- A. 向左平移  $\frac{\pi}{12}$  个单位长度  
 B. 向右平移  $\frac{\pi}{12}$  个单位长度  
 C. 向左平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位长度  
 D. 向右平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位长度

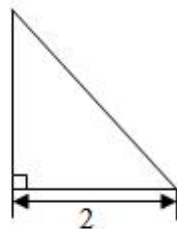
8. 已知  $F_1, F_2$  为双曲线  $C: \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$  的左、右焦点,  $P$  为  $C$  上异于顶点的点. 直线  $l$  分别与  $PF_1, PF_2$  为直径的圆相切于  $A, B$  两点, 则  $|AB| =$  ( )

- A.  $\sqrt{7}$                       B. 3                      C. 4                      D. 5

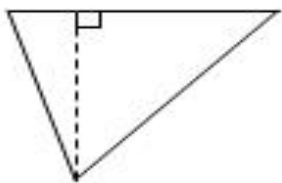
9. 一个几何体的三视图如图所示, 该几何体的各个表面中, 最大面的面积为( )



正视图



侧视图



俯视图

- A.  $2\sqrt{15}$                       B.  $\sqrt{15}$                       C. 2                      D. 4

10. 平行四边形  $ABCD$  内接于椭圆  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ , 直线  $AB$  的斜率  $k_1 = 1$ , 则直线  $AD$  的斜率  $k_2 =$  ( )

- A.  $\frac{1}{2}$                       B.  $-\frac{1}{2}$                       C.  $-\frac{1}{4}$                       D. -2

11. 学业水平测试成绩按照考生原始成绩从高到低分为 A,B,C,D,E 五个等级, 某班共有 36 名同学且全部选考物理化学两科。这两科的学业水平考试成绩如图所示, 该班学生中, 这两科等级均为 A 的学生有 5 人, 这两科中仅有一科等级为 A 的学生, 其另一科等级为 B。则该班( )

- A. 物理化学等级都是 B 的学生至多有 12 人
- B. 物理化学等级都是 B 的学生至少有 5 人
- C. 这两科只有一科等级为 B 且最高等级为 B 的学生至多有 18 人
- D. 这两科只有一科等级为 B 且最高等级为 B 的学生至少有一人

科目 等级	A	B	C	D	E
物理	10	16	9	1	0
化学	8	19	7	2	0

12. 已知函数  $f(x) = xe^x$ , 要使函数  $g(x) = k[f(x)]^2 - f(x) + 1$  的零点个数最多, 则  $k$  的取值范围是( )

- A.  $k < -e^2$
- B.  $k < -e^2 - e$
- C.  $k > -e^2 - e$
- D.  $k > -e^2$

**二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 请将答案写在答题卡上.**

13. 已知  $x$  与  $y$  之间的一组数据:  $(1,1), (2,3), (2,5), (3,7)$ , 则  $y$  与  $x$  的线性回归方程必过点\_\_\_\_\_.

14. 在区间  $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$  上随机取一个数  $x$ , 则  $\sin 2x$  的值介于 0 到  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  之间的概率为\_\_\_\_\_.

15. 在  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 若  $2(b\cos A + a\cos B) = c^2$ ,  $b = 3, 3\cos A = 1$ , 则  $a =$ \_\_\_\_\_.

16. 在面积为 4 的正方形  $ABCD$  中,  $M$  是线段  $AB$  的中点, 现将图形沿  $MC, MD$  折起, 使线段  $MA, MB$  重合, 得到一个四面体  $A-CDM$  (其中点  $B$  重合于点  $A$ ), 则该四面体外接球的表面积为\_\_\_\_\_.

**三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤. 第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答.**

(一) 必考题: 共 60 分.

17. (本小题满分 12 分) 已知正项等比数列  $\{a_n\}$  中,  $a_1 = \frac{1}{2}$ , 且  $a_2, a_3, a_4 - 1$  成等差数列.

(1) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;

(2) 若  $b_n = 2\log_2 a_n + 4$ , 求数列  $\left\{\frac{1}{b_n \cdot b_{n+1}}\right\}$  的前  $n$  项和  $T_n$ .

18. (本小题满分 12 分)

在测试中，客观题难度的计算公式为  $P_i = \frac{R_i}{N}$ ，其中  $P_i$  为第  $i$  题的难度， $R_i$  为答对该题的人数， $N$  为参加测试的总人数。现对某校高三年级 120 名学生进行一次测试，共 5 道客观题。测试前根据对学生的了解，预估了每道题的难度，如下表所示：

题号	1	2	3	4	5
考前预估难度 $P_i$	0.9	0.8	0.7	0.6	0.4

测试后，从中随机抽取了 10 名学生，将他们编号后统计各题的作答情况，如下表所示（“√”表示答对，“×”表示答错）：

题号 \ 学生编号	1	2	3	4	5
1	×	√	√	√	√
2	√	√	√	√	×
3	√	√	√	√	×
4	√	√	√	×	×
5	√	√	√	√	√
6	√	×	×	√	×
7	×	√	√	√	×
8	√	×	×	×	×
9	√	√	×	×	×
10	√	√	√	√	×

(1) 根据题中数据，将抽样的 10 名学生每道题实测的答对人数及相应的实测难度填入下表，并估计这 120 名学生中第 5 题的实测答对人数；

题号	1	2	3	4	5
实测答对人数					
实测难度					

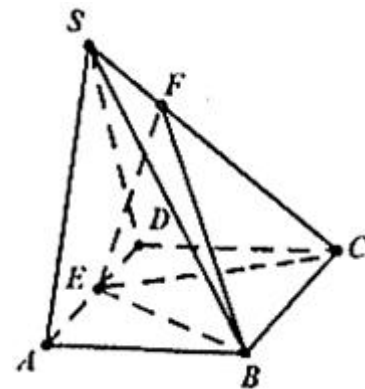
(2) 从编号为 1 到 5 的 5 人中随机抽取 2 人，求恰好有 1 人答对第 5 题的概率；

(3) 定义统计量  $S = \frac{1}{n}[(P'_1 - P_1)^2 + (P'_2 - P_2)^2 + \dots + (P'_n - P_n)^2]$ ，其中  $P'_i$  为第  $i$  题的实测难度， $P_i$  为第  $i$  题的预估难度 ( $i = 1, 2, \dots, n$ )。规定：若  $S < 0.05$ ，则称该次测试的难度预估合理，否则为不合理。判断本次测试的难度预估是否合理。

### 19. (本小题满分 12 分)

如图已知四棱锥  $S-ABCD$  中，底面  $ABCD$  是边长为 2 的菱形， $\angle BAD = 60^\circ$ ， $SA = SD = \sqrt{5}$ ， $SB = \sqrt{7}$ ，

点  $E$  是棱  $AD$  的中点，点  $F$  在  $SC$  棱上，且  $\frac{SF}{SC} = \frac{1}{3}$ ，



(1) 求证： $SA \parallel$  平面  $BEF$ ；

(2) 求三棱锥  $F-EBC$  的体积。

### 20. (本小题满分 12 分)

已知点  $F$  是抛物线  $C: x^2 = 2py (p > 0)$  的焦点，点  $M$  是抛物线上的定点，且  $\overline{MF} = (4, 0)$ 。

(1) 求抛物线  $C$  的方程；

(2) 直线  $AB$  与抛物线  $C$  交于不同两点  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ， $|x_2 - x_1| = 3$ ，直线  $AB$  与抛物线  $C$  的切线  $l$  平行，设切点为  $N$  点，试问  $\Delta ABN$  的面积是否是定值，若是，求出这个定值；若不是，请说明理由。

21. (本小题满分 12 分)

$$\text{设 } f(x) = xe^x - ax^2, g(x) = \ln x + x - x^2 + 1 - \frac{e}{a}.$$

- (1) 求  $g(x)$  的单调区间;
- (2) 讨论  $f(x)$  零点的个数;
- (3) 当  $a > 0$  时, 设  $h(x) = f(x) - ag(x) \geq 0$  恒成立, 求实数  $a$  的取值范围.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. (本小题满分 10 分) 选修 4-4: 坐标系与参数方程

在直角坐标系  $xOy$  中, 设直线  $l: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 2t \end{cases}$  ( $t$  为参数), 曲线  $C_1: \begin{cases} x = 2 + 2\cos\theta \\ y = 2\sin\theta \end{cases}$  ( $\theta$  为参数), 在以  $O$  为极

点、 $x$  正半轴为极轴的极坐标系中:

- (1) 求  $C_1$  和  $l$  的极坐标方程;
- (2) 设曲线  $C_2: \rho = 4\sin\theta$ . 曲线  $\theta = \alpha$  ( $\rho > 0, \frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ), 分别与  $C_1$ 、 $C_2$  交于  $A$ 、 $B$  两点, 若  $AB$  的中点在直线  $l$  上, 求  $|AB|$ .

23. (本小题满分 10 分) 选修 4-5: 不等式选讲

已知关于  $x$  的不等式  $|2x| + |2x - 1| \leq m$  有解.

- (1) 求实数  $m$  的取值范围;
- (2) 已知  $a > 0, b > 0, a + b = m$ , 证明:  $\frac{a^2}{a + 2b} + \frac{b^2}{2a + b} \geq \frac{1}{3}$ .