

长郡中学 2020 届高三停课不停学阶段性测试

理科数学试题

一. 选择题

1. 若 i 为虚数单位, 复数 z 满足 $z(1+i) = |1-i| + i$, 则 z 的虚部为 ()

- A. $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ B. $\sqrt{2}-1$ C. $\frac{-\sqrt{2}+1}{2}i$ D. $\frac{1-\sqrt{2}}{2}$

2. 设集合 $A = \left\{ x \mid \frac{x+3}{x-1} < 0 \right\}$, $B = \{x \mid x \leq -3\}$, 则集合 $\{x \mid x \geq 1\} =$ ()

- A. $A \cap B$ B. $A \cup B$
C. $(\complement_{\mathbb{R}}A) \cup (\complement_{\mathbb{R}}B)$ D. $(\complement_{\mathbb{R}}A) \cap (\complement_{\mathbb{R}}B)$

3. 中国古代数学著作《九章算术》中有这样一个问题: “某贾人擅营, 月入益功疾 (注: 从第 2 月开始, 每月比前一月多入相同量的铜钱), 3 月入 25 贯, 全年 (按 12 个月计) 共入 510 贯”, 则该人 12 月营收贯数为 ()

- A. 35 B. 65 C. 70 D. 60

4. “石头、剪刀、布”, 又称“猜丁壳”, 是一种流传多年的猜拳游戏, 起源于中国, 然后传到日本、朝鲜等地, 随着亚欧贸易的不断发展, 它传到了欧洲, 到了近代逐渐风靡世界. 其游戏规则是: 出拳之前双方齐喊口令, 然后在话音刚落时同时出拳, 握紧的拳头代表“石头”, 食指和中指伸出代表“剪刀”, 五指伸开代表“布”. “石头”胜“剪刀”、“剪刀”胜“布”、而“布”又胜过“石头”. 若所出的拳相同, 则为和局. 小千和大年两位同学进行“五局三胜制”的“石头、剪刀、布”游戏比赛, 则小千和大年比赛至第四局小千胜出的概率是 ()

- A. $\frac{1}{27}$ B. $\frac{2}{27}$ C. $\frac{2}{81}$ D. $\frac{8}{81}$

5. 已知 $a = \log_{0.6} 2$, $b = \log_2 0.6$, $c = 0.6^2$, 则 ()

- A. $a > b > c$ B. $b > c > a$ C. $c > b > a$ D. $c > a > b$

6. 椭圆 $C: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$, F_1, F_2 是其焦点, 点 P 是椭圆 C 上一点, 若 $\Delta F_1 P F_2$ 是直角三

角形, 则点 P 到 x 轴的距离为 ()

- A. $\frac{5}{3}$ B. $\frac{5}{2}$ C. $\sqrt{5}$ D. $2\sqrt{5}$

7. 若 α 为锐角, 且 $(4\cos 50^\circ - \tan 40^\circ)\tan \alpha = 1$ 则 $\alpha =$ ()

- A. 60° B. 50° C. 40° D. 30°

8. 设等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 公比为 q , 且 S_3, S_9, S_6 成等差数列, 则 $8q^3$ 等于 ()

- A. -2 B. -4 C. 2 D. 4

9. 在平面直角坐标系 xOy 中, 圆 C 的方程为 $x^2 + y^2 - 8x + 15 = 0$, 若直线 $y = kx + 2$ 上至少存在一点, 使得以该点为圆心, 半径为 1 的圆与圆 C 有公共点, 则 k 的最小值是 ()

- A. $-\frac{4}{3}$ B. $-\frac{5}{4}$ C. $-\frac{3}{5}$ D. $-\frac{5}{3}$

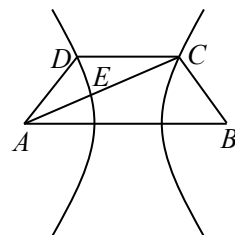
10. 已知函数 $f(x) = a\sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x$ 的图象关于直线 $x = -\frac{\pi}{12}$ 对称, 若

$f(x_1) \cdot f(x_2) = -4$, 则 $|x_1 - x_2|$ 的最小值为 ()

- A. $\frac{\pi}{3}$ B. $\frac{2\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{\pi}{2}$

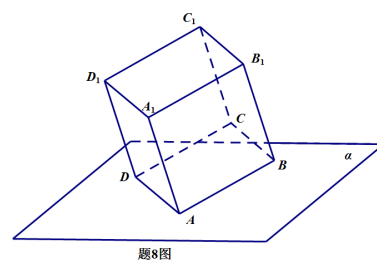
11. 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, 已知 $|AB| = 2|CD|$, $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$, 双曲线过 C, D, E 三点, 且以 A, B 为焦点, 则双曲线的离心率为 ()

- A. $\sqrt{7}$ B. $2\sqrt{2}$
C. 3 D. $\sqrt{10}$



12. 如图, 棱长为 4 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$, 点 A 在平面 α 内, 平面 $ABCD$ 与平面 α 所成的二面角为 30° , 则顶点 C_1 到平面 α 的距离的最大值是

- ()
A. $2(2 + \sqrt{2})$ B. $2(\sqrt{3} + \sqrt{2})$
C. $2(\sqrt{3} + 1)$ D. $2(\sqrt{2} + 1)$

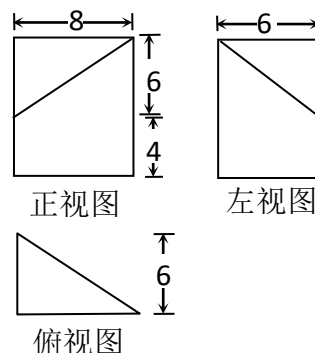


二. 填空题

13. 已知 $n = \frac{12}{\pi} \int_{-1}^1 (\sqrt{1-x^2} - 2x) dx$, 则 $x \left(1 - \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^n$ 的展开式

中的常数项为 _____

14. 某封闭几何体的三视图如图所示,



则该几何体的表面积为_____

15. 对于数列 $\{a_n\}$, 若 $\forall m, n \in \mathbf{N}^* (m \neq n)$, 都有 $\frac{a_m - a_n}{m - n} \geq t$ (t 为常数) 成立, 则称数列 $\{a_n\}$ 具有性质 $P(t)$. 若数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = n^2 - \frac{a}{n}$, 且具有性质 $P(10)$, 则实数 a 的取值范围是_____

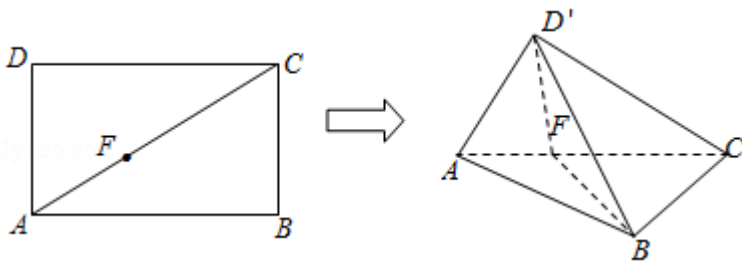
16. 若 $\forall x \in [e, +\infty)$, 满足 $2x^3 \ln x - me^{\frac{m}{x}} \geq 0$ 恒成立, 则实数 m 的取值范围为_____.

三. 解答题

17. 已知在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别为角 A, B, C 的对应边, 点 D 为 BC 边的中点, $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{AD^2}{3 \sin B}$.

- (1) 求 $\sin \angle BAD \cdot \sin \angle BDA$ 的值;
- (2) 若 $BC = 6AB, AD = 2\sqrt{2}$, 求 b .

18. 如图, 矩形 $ABCD$ 中, $AB=6, AD=2\sqrt{3}$, 点 F 是 AC 上的动点. 现将矩形 $ABCD$ 沿着对角线 AC 折成二面角 $D' - AC - B$, 使得 $D'B = \sqrt{30}$.



- (1) 求证: 当 $AF = \sqrt{3}$ 时, $D'F \perp BC$;
- (2) 试求 CF 的长, 使得二面角 $A - D'F - B$ 的大小为 $\frac{\pi}{4}$.

19. 已知 F 为抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点, 过 F 的动直线交抛物线 C 于 A, B 两点.

当直线与 x 轴垂直时, $|AB| = 4$.

(1) 求抛物线 C 的方程;

(2) 若直线 AB 与抛物线的准线 l 相交于点 M , 在抛物线 C 上是否存在点 P , 使得直线 PA, PM, PB 的斜率成等差数列? 若存在, 求出点 P 的坐标; 若不存在, 说明理由.

20. 已知函数 $f(x) = e^{-x} - ax (x \in \mathbb{R})$.

(1) 当 $a = -1$ 时, 求函数 $f(x)$ 的最小值;

(2) 若 $x \geq 0$ 时, $f(-x) + \ln(x+1) \geq 1$, 求实数 a 的取值范围;

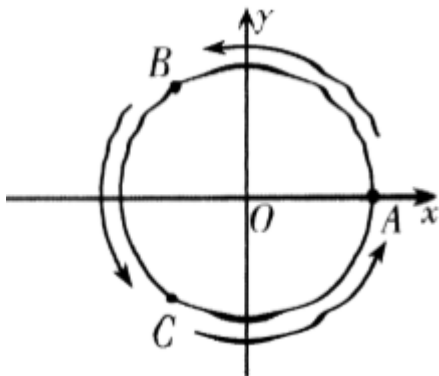
21. 如图, 直角坐标系中, 圆的方程为 $x^2 + y^2 = 1$, $A(1, 0), B\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), C\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

为圆上三个定点, 某同学从 A 点开始, 用掷骰子的方法移动棋子. 规定: ①每掷一次骰子, 把一枚棋子从一个定点沿圆弧移动到相邻下一个定点; ②棋子移动的方向由掷骰子决定, 若掷出骰子的点数为偶数, 则按图中箭头方向移动; 若掷出骰子的点数为奇数, 则按图中箭头相反的方向移动.

设掷骰子 n 次时, 棋子移动到 A, B, C 处的概率分别为 $P_n(A), P_n(B), P_n(C)$.

例如: 掷骰子一次时, 棋子移动到 A, B, C 处的概率分别为 $P_1(A) = 0,$

$P_1(B) = \frac{1}{2}, P_1(C) = \frac{1}{2}.$



(1) 分别掷骰子二次, 三次时, 求棋子分别移动到 A, B, C 处的概率;

(2) 掷骰子 N 次时, 若以 x 轴非负半轴为始边, 以射线 OA, OB, OC 为终边的角的余

弦值记为随机变量 X_n ，求 X_4 的分布列和数学期望；

(3) 记 $P_n(A) = a_n$, $P_n(B) = b_n$, $P_n(C) = c_n$, 其中 $a_n + b_n + c_n = 1$. 证明: 数列 $\left\{b_n - \frac{1}{3}\right\}$

是等比数列, 并求 a_{2020} .

22. 选修 4-4: 坐标系与参数方程

在平面直角坐标系中, 曲线 $C_1: \begin{cases} x = 3 + 3\cos\alpha \\ y = 2\sin\alpha \end{cases}$ (α 为参数) 经过伸缩变换 $\begin{cases} x' = \frac{x}{3} \\ y' = \frac{y}{2} \end{cases}$, 后的曲

线为 C_2 , 以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系.

(1) 求 C_2 的极坐标方程;

(2) 设曲线 C_3 的极坐标方程为 $\rho \sin\left(\frac{\pi}{6} - \theta\right) = 1$, 且曲线 C_3 与曲线 C_2 相交于 P, Q 两点, 求 $|PQ|$ 的值.

23. 选修 4-5: 不等式选讲

已知函数 $f(x) = |x + b^2| - |x + 1|$, $g(x) = |x + a^2 + c^2| + |x - 2b^2|$, 其中 a, b, c 均为正实数, 且 $ab + bc + ac = 1$.

(1) 当 $b = 1$ 时, 求不等式 $f(x) \geq 1$ 的解集;

(2) 当 $x \in \mathbb{R}$ 时, 求证 $f(x) \leq g(x)$.