第 18 讲　函数的图象、性质及应用

专题探究

【命题趋势】

高考对函数图象与性质的考查主要体现在函数的定义域、值域、解析式、单调性、奇偶性、周期性等方面.函数的单调性是考查的重点之一,且单调性和奇偶性有向抽象函数拓展的趋势.函数图象注重考查图象变换(平移变换、伸缩变换、对称变换)及基本初等函数图象的应用,考查比较灵活,涉及的知识点较多,且每年均有创新.试题考查角度有两个方面,一是函数解析式与函数图象的对应关系;二是利用图象研究函数性质、方程及不等式的解等,综合性较强.题型多以选择题、填空题为主,一般属于中档题.而函数的零点主要考查零点所在区间、零点个数的判断以及由函数零点个数求参数的取值范围,考查形式主要是选择题、填空题,也有可能以解答题中某一小问的形式出现,多为中偏低档题.

【备考建议】

函数的图象与性质是高考的热点之一,而函数与方程基本是高考的必考点,常以基本初等函数为载体,考查函数的单调性、奇偶性、周期性等.因此备考时要熟练掌握基本初等函数及几种常见函数的图象与性质,掌握图象变换及变换规律.要会求具体函数的定义域、值域;与分段函数有关的问题要分清自变量对应的解析式,分段求解;要会知式选图及知图选式,能够利用函数的图象研究函数的性质(特别是单调性、最值、零点)、方程解的问题及解不等式、比较大小等;要能够综合利用函数性质解决求值及取值范围,与不等式结合的解集问题.体会分类讨论思想、数形结合思想、转化化归思想、函数方程思想等数学思想在解题中的运用.

典例剖析

探究一　函数的概念及表示

例 1 (1)已知函数 $f(x)$的定义域为$(-1,1)$,则函数$g(x)=f\left(\frac{x}{2}\right)+f(x-1)$的定义域为　(　　)

A. $(-2,0)$　　B. $(-2,2)$

C. $(0,2)$　　D. $\left(-\frac{1}{2},0\right)$

(2)已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^{x-1}-1,x\geqslant 1,\\-\log_2(3-x),x<1,\end{cases}$ 若 $f(a)=1$,则 $f(1-a)=$　(　　)

A. 2　　B. -2

C. 1　　D. -1

(3)定义域为 **R** 的函数 $f(x)$满足 $f(x+3)=2f(x)$,当 $x\in[-1,2)$时,$f(x)=\begin{cases}x^2+x,x\in[-1,0),\\-\left(\frac{1}{2}\right)^{|x-1|},x\in[0,2).\end{cases}$ 若存在 $x\in[-4,-1)$,使得不等式 $t^2-3t\geqslant 4f(x)$成立,则实数 t 的取值范围是________.

【点评】函数的概念涉及的基本问题一般是定义域、值域、解析式、函数值等,命题形式有两种:一种是以基本初等函数为载体构造试题,另一种是以某新定义构建函数.

探究二　函数的性质及应用

例 2 (1)若函数 $f(x)=x\ln(x+\sqrt{a+x^2})$为偶函数,则 $a=$________.

(2)已知 $x=\ln\pi,y=\log_5 2,z=e^{-\frac{1}{2}}$,则　(　　)

A. $x<y<z$

B. $z<x<y$

C. $z<y<x$

D. $y<z<x$

(3)设函数 $f(x)=x|x-a|$,若对$\forall x_1,x_2\in[3,+\infty)$,$x_1\neq x_2$,不等式$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$恒成立,则实数 a 的取值范围是　(　　)

A. $(-\infty,-3]$

B. $[-3,0)$

C. $(-\infty,3]$

D. $(0,3]$

(4)已知函数 $f(x)$是 **R** 上的偶函数,$g(x)$是 **R** 上的

奇函数，且 $g(x)=f(x-1)$，若 $f(0)=2$，则 $f(2\ 020)$ 的值为　　(　　)

A. 2　　　　B. 0

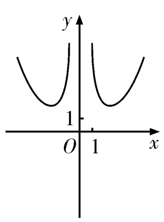
C. -2　　　　D. ± 2

【点评】(1)函数的性质指奇偶性，单调性和周期性；由函数的奇偶性可以进行函数在其定义域内图象、函数值、解析式和单调性的转化，函数单调性可以比较大小，求函数最值，解不等式；周期性考纲要求是了解，应用时关键是利用周期性转化函数的解析式、图象和性质，同时应注意函数性质的“逆用”.

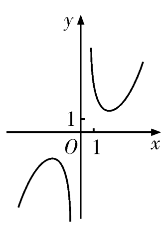
(2)应用函数性质解题时应：①数形结合，扬长避短；②等价转化，迅速破解；③含参变量，分类讨论，全面考虑.

探究三　函数的图象及应用

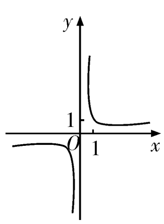
例 3 (1)函数 $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{x^2}$ 的图象大致是　　(　　)



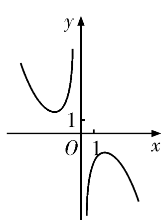
A



B



C



D

(2)已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足：①对任意 $x\in\mathbf{R}$，有 $f(x+2)=2f(x)$；②当 $x\in[-1,1]$ 时，$f(x)=\sqrt{1-x^2}$. 若函数 $g(x)=\begin{cases}e^x(x\leqslant 0),\\ \ln x(x>0),\end{cases}$ 则函数 $y=f(x)-g(x)$ 在区间 $(-4,5)$ 上的零点个数是　　(　　)

A. 7　　　　B. 8

C. 9　　　　D. 10

(3)设函数 $f(x)=\begin{cases}1,x>0,\\0,x=0,\\-1,x<0,\end{cases}$ $g(x)=x^2f(x-1)$，则函数 $g(x)$ 的递减区间是________.

(4)在平面直角坐标系内，点 M,N 同时满足条件：①M,N 都在函数 $y=f(x)$ 的图象上；②M,N 关于原点对称，则称 (M,N) 是函数 $y=f(x)$ 的一个“相关点对”(点对 (M,N) 与 (N,M) 看作同一个“相关点对”). 若函数 $f(x)=\begin{cases}kx+1,x>0,\\ \ln(-x),x<0\end{cases}$ 有两个“相关点对”，则实数 k 的取值范围是　　(　　)

A. $(0,1)$

B. $(-1,0)$

C. $(0,+\infty)$

D. $(1,+\infty)$

【点评】(1)作图：常用描点法和图象变换法. 图象变换法常用的有平移变换、伸缩变换和对称变换.

(2)识图：从图象与轴的交点及左、右、上、下分布范围、变化趋势、对称性等方面找准解析式与图象的对应关系.

(3)用图：在研究函数性质特别是单调性、最值、零点时，要注意用好其与图象的关系，结合图象研究.

探究四　函数与方程的综合应用

例 4 (1)已知 $x\in\mathbf{R}$，符号 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，若函数 $f(x)=\dfrac{[x]}{x}-a(x\neq 0)$ 有且仅有 3 个零点，则实数 a 的取值范围是　　(　　)

A. $\left(\dfrac{3}{4},\dfrac{4}{5}\right]\cup\left[\dfrac{4}{3},\dfrac{3}{2}\right)$

B. $\left[\dfrac{3}{4},\dfrac{4}{5}\right]\cup\left[\dfrac{4}{3},\dfrac{3}{2}\right]$

C. $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{3}\right]\cup\left[\dfrac{5}{4},\dfrac{3}{2}\right)$

D. $\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{3}\right]\cup\left[\dfrac{5}{4},\dfrac{3}{2}\right]$

(2)已知 $f(x)=\begin{cases}|\log_2(x-1)|,1<x\leqslant 3,\\ \dfrac{1}{2}x^2-5x+\dfrac{23}{2},x>3,\end{cases}$ 若 $f(x)=m$ 有四个不同的实根 x_1,x_2,x_3,x_4 且 $x_1<x_2<x_3<x_4$，则 $\left(\dfrac{m}{x_1}+\dfrac{m}{x_2}\right)(x_3+x_4)$ 的取值范围为　　(　　)

A. $(0,10)$　　　　B. $[0,10]$

C. $(0,4)$　　　　D. $[0,4]$

(3)如果函数 $y=f(x)$ 在其定义域内总存在三个不同实数 x_1,x_2,x_3,满足 $|x_i-2|f(x_i)=1(i=1,2,3)$,则称函数 $f(x)$ 具有性质 Ω. 已知函数 $f(x)=ae^x$ 具有性质 Ω,则实数 a 的取值范围是________.

(4)设函数 $f(x)=\ln(1+|x|)-\dfrac{1}{1+x^2}$,则使得 $f(x)>f(2x-1)$ 成立的 x 的取值范围是　(　　)

A. $\left(\dfrac{1}{3},1\right)$

B. $\left(-\infty,\dfrac{1}{3}\right)\cup(1,+\infty)$

C. $\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)$

D. $\left(-\infty,-\dfrac{1}{3}\right)\cup\left(\dfrac{1}{3},+\infty\right)$

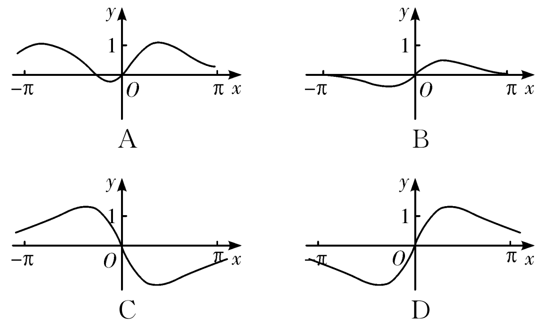
【点评】函数的零点与方程根的问题处理方法

(1)函数的零点、方程的根,都可以转化为函数图象与 x 轴的交点,数形结合法是解决此类问题的一个有效方法.

(2)解决由函数零点的存在情况求参数的值或取值范围问题,关键是利用函数与方程思想或数形结合思想,构建关于参数的方程或不等式求解.

高考回眸

考题1[2019·全国卷Ⅰ]函数 $f(x)=\dfrac{\sin x+x}{\cos x+x^2}$ 在 $[-\pi,\pi]$ 的图象大致为　(　　)



考题2[2019·全国卷Ⅱ]设函数 $f(x)$ 的定义域为 **R**,满足 $f(x+1)=2f(x)$,且当 $x\in(0,1]$ 时,$f(x)=x(x-1)$. 若对任意 $x\in(-\infty,m]$,都有 $f(x)\geqslant-\dfrac{8}{9}$,则 m 的取值范围是　(　　)

A. $\left(-\infty,\dfrac{9}{4}\right]$

B. $\left(-\infty,\dfrac{7}{3}\right]$

C. $\left(-\infty,\dfrac{5}{2}\right]$

D. $\left(-\infty,\dfrac{8}{3}\right]$

考题3[2019·天津]已知 $a=\log_5 2$,$b=\log_{0.5}0.2$,$c=0.5^{0.2}$,则 a,b,c 的大小关系为　(　　)

A. $a<c<b$

B. $a<b<c$

C. $b<c<a$

D. $c<a<b$

温馨提示:请完成考点限时训练(十八)p138