文科数学试卷

一、选择题（本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1.已知集合 $M=\{x||x|\geq 1\}$，$N=\{x|2^{x-1}<1\}$，则 $M\bigcap N=$（　　）【答案】A

A. $\{x|x\leqslant -1\}$　　B. $\{x|x\leq 1\}$　　C. $\{x|-1\leq x\leq 1\}$　　D. $\{x|x<1\}$

2.复数 $z=\dfrac{2i}{1-i}$ 的共轭复数为（　　）【答案】A

A. $-1-i$　　B. $-1+i$　　C. $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i$　　D. $-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i$

3.已知向量 $\overrightarrow{e_1}$，$\overrightarrow{e_2}$ 为单位向量，若 $\left(\sqrt{2}\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2}\right)\perp\left(\sqrt{2}\overrightarrow{e_1}+2\overrightarrow{e_2}\right)$，则向量 $\overrightarrow{e_1}$，$\overrightarrow{e_2}$ 的夹角大小为（　　）

A. 0　　B. $\dfrac{\pi}{4}$　　C. $\dfrac{\pi}{2}$　　D. π

【答案】C

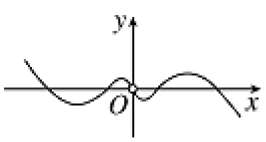
4.若 $\dfrac{\cos\alpha}{\tan\alpha}=\dfrac{8}{3}$，则 $\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)=$（　　）【答案】A

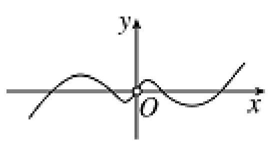
A. $-\dfrac{1}{3}$　　B. $\dfrac{1}{3}$　　C. $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$　　D. $-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

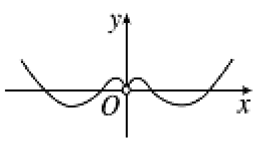
5.若 P 是圆 $C:(x+3)^2+(y-3)^2=1$ 上任一点，则点 P 到直线 $y=kx-1$ 距离的最大值为（　　）【答案】D

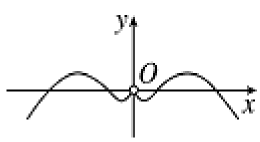
A. $\sqrt{10}+1$　　B. $3\sqrt{2}+1$　　C. 8　　D. 6

6.函数 $f(x)=\sin x\cdot\ln|x|$ 的部分图像象是（　）【答案】A

A. 

B. 

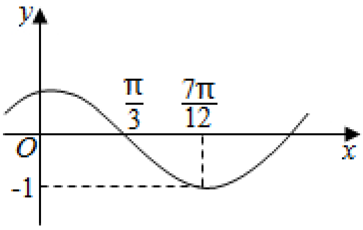
C. 

D. 

【解析】试题分析：$\because f(-x)=\sin(-x)\ln|-x|=-\sin x\ln|x|=-f(x)$，$\therefore f(x)$ 为奇函数，所以排除 C,D 答案，

令 $f(x)=0$，则 $\sin x=0$ 或 $\ln|x|=0$，所以 $x=k\pi$ 或 $x=\pm1$，所以，当 $x=\frac{\pi}{6}$ 时， $f(x)=\sin\frac{\pi}{6}\times\ln\left|\frac{\pi}{6}\right|<0$

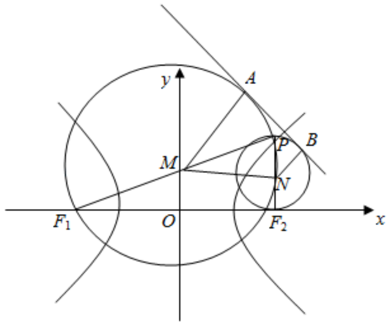
7.函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$(其中 $A>0$， $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$) 的图象如图所示，为了得到 $g(x)=\cos\omega x$ 的图象，则只要将 $f(x)$ 的图象(　　)【答案】A



A. 向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度　　B. 向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度

C. 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度　　D. 向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度

8.已知 F_1， F_2 为双曲线 $C:\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ 的左、右焦点， P 为 C 上异于顶点的点．直线 l 分别与 PF_1， PF_2 为直径的圆相切于 A， B 两点，则 $|AB|=$(　　)【答案】B



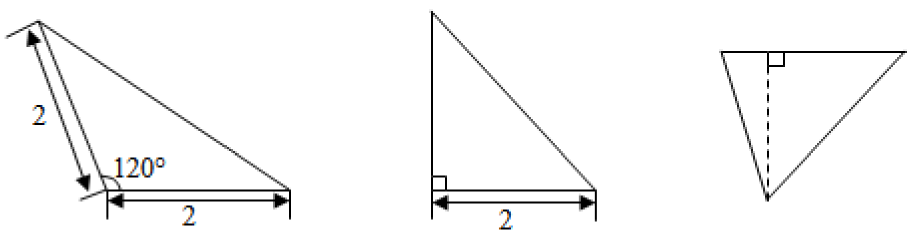
A. $\sqrt{7}$　　B. 3

C. 4　　D. 5

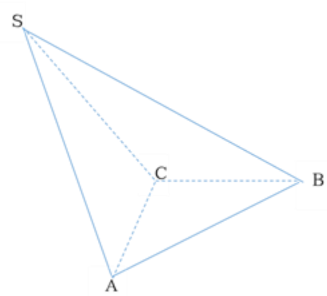
【解析】解：如图，设 PF_1，PF_2 的中点分别为 M，N，则 $MN\in$　，

$AM-NB=\frac{1}{2}(PF_1-PF_2)=a$， $\therefore AB=\sqrt{MN^2-(MA-NB)^2}=\sqrt{c^2-a^2}=b=3$

9.一个几何体的三视图如图所示，该几何体的各个表面中，最大面的面积为(　　)



正视图　　侧视图　　俯视图



A $2\sqrt{15}$　　B. $\sqrt{15}$　　C. 2　　D. 4

【答案】B

【解析】几何体如图，$SA=AB=2\sqrt{2}$，$SB=2\sqrt{3}$，所以最大面 SAB 的面积为 $\frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times\sqrt{(2\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2}=\sqrt{15}$，选 B．

10.平行四边形 $ABCD$ 内接于椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$，直线 AB 的斜率 $k_1=1$，则直线 AD 的斜率 $k_2=$(　　)

A. $\frac{1}{2}$　　　　B. $-\frac{1}{2}$　　　　C. $-\frac{1}{4}$　　　　D. -2

【答案】B

【解析】设直线 AB 的方程为 $y=x+t$，$A\left(x_1, y_1\right)$，$B\left(x_2, y_2\right)$，利用椭圆与平行四边形的对称性可得：$D\left(-x_2,-y_2\right)$联立 $\begin{cases} y=x+t \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1 \end{cases}$，可化为 $3x^2+4tx+2t^2-4=0$，□ >0，解得 $0<t^2<6$（$t=0$ 时不能构成平行四边形）$\therefore x_1+x_2=-\frac{4t}{3}$，则直线 AD 的斜率 $k_2=\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}=\frac{x_1+x_2+2t}{x_1+x_2}=1+\frac{2t}{x_1+x_2}=1+\frac{2t}{-\frac{4t}{3}}=-\frac{1}{2}$

11.学业水平测试成绩按照考生原始成绩从高到低分为 A,B,C,D,E 五个等级，某班共有 36 名同学且全部选考物理化学两科。这两科的学业水平考试成绩如图所示，该班学生中，这两科等级均为 A 的学生有 5 人，这两科中仅有一科等级为 A 的学生，其另一科等级为 B。则该班

A. 物理化学等级都是 B 的学生至多有 12 人

B.物理化学等级都是 B 的学生至少有 5 人

C.这两科只有一科等级为 B 且最高等级为 B 的学生至多有 18 人

D.这两科只有一科等级为 B 且最高等级为 B 的学生至少有一人

科目 等级	A	B	C	D	E
物理	10	16	9	1	0
化学	8	19	7	2	0

【答案】 D

12.已知函数 $f(x)=xe^x$，要使函数 $g(x)=k[f(x)]^2-f(x)+1$的零点个数最多，则 k 的取值范围是

A　$k<-e^2$　　B. $k<-e^2-e$　　C. $k>-e^2-e$　　D. $k>-e^2$

【答案】B

二．填空题

13.已知 x 与 y 之间的一组数据：$(1,1),(2,3),(2,5),(3,7)$，则 y 与 x 的线性回归方程必过点______ .

【答案】$(2,4)$

14, 在区间$\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$上随机取一个数 x，则 $\sin 2x$ 的值介于 0 到 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 之间的概率为 ____ $\frac{1}{3}$

15.在□ABC 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，若 $2(b\cos A+a\cos B)=c^2$，$b=3,3\cos A=1,$ 则 $a=$

____.【答案】3

16.在面积为 4 的正方形 $ABCD$ 中，M 是线段 AB 的中点，现将图形沿 MC,MD 折起，使线段 MA,MB 重合，得到一个四面体 $A-CDM$（其中点 B 重合于点 A），则该四面体外接球的表面积为______.

【答案】$\frac{19\pi}{3}$

三．解答题

17.已知正项等比数列$\{a_n\}$中，$a_1=\frac{1}{2}$，且 a_2,a_3,a_4-1 成等差数列.

(1) 求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2) 若 $b_n=2\log_2 a_n+4$，求数列$\left\{\frac{1}{b_n\cdot b_{n+1}}\right\}$的前 n 项和 T_n .

【答案】(1) $a_n=2^{n-2}$ (2) $T_n=\frac{n}{4(n+1)}$

【解析】(1) 设等比数列$\{a_n\}$ 公比为 q．因为 a_2,a_3,a_4-1 成等差数列．所以 $2a_3=a_2+a_4-1$，得 $2a_1q^2=a_1q+a_1q^3-1$．又 $a_1=\frac{1}{2}$，则 $2\times\frac{1}{2}q^2=\frac{1}{2}q+\frac{1}{2}q^3-1$，即 $q^2=\frac{1}{2}q+\frac{1}{2}q^3-1$．所以 $2q^2=q+q^3-2$，所以 $2q^2+2=q+q^3$，所以 $2(q^2+1)=q(q^2+1)$ 所以 $(q^2+1)(2-q)=0$．显然 $q^2+1\neq 0$，所以 $2-q=0$，解得 $q=2$．故数列$\{a_n\}$的通项公式 $a_n=a_1q^{n-1}=\frac{1}{2}2^{n-1}=2^{n-2}$.

(2) 由 (1) 知，$b_n=2\log_2 2^{n-2}+4=2(n-2)+4=2n$. 所以 $\dfrac{1}{b_nb_{n+1}}=\dfrac{1}{2n?2(n+1)}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$.

则 $T_n=\dfrac{1}{b_1}+\dfrac{1}{b_2}+\cdots+\dfrac{1}{b_n}=\dfrac{1}{4}\left[\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)\right]$.

$=\dfrac{1}{4}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)=\dfrac{n}{4(n+1)}$.

18.在测试中，客观题难度的计算公式为 $P_i=\dfrac{R_i}{N}$，其中 P_i 为第 i 题的难度，R_i 为答对该题的人数，N 为参加测试的总人数．现对某校高三年级 120 名学生进行一次测试，共 5 道客观题．测试前根据对学生的了解，预估了每道题的难度，如下表所示：

题号	1	2	3	4	5
考前预估难度 P_{i}	0.9	0 8	0.7	0.6	0.4

测试后，从中随机抽取了 10 名学生，将他们编号后统计各题的作答情况，如下表所示（“√”表示答对，“×”表示答错）：

学生编号　题号	1	2	3	4	5
1	×	√	√	√	√
2	√	√	√	√	×
3	√	√	√	√	×
4	√	√	√	×	×
5	√	√	√	√	√
6	√	×	×	√	×
7	×	√	√	√	×
8	√	×	×	×	×
9	√	√	×	×	×
10	√	√	√	√	×

（Ⅰ）根据题中数据，将抽样的 10 名学生每道题实测的答对人数及相应的实测难度填入下表，并估计这 120 名学生中第 5 题的实测答对人数；

题号	1	2	3	4	5
实测答对人数					
实测难度					

（Ⅱ）从编号为 1 到 5 的 5 人中随机抽取 2 人，求恰好有 1 人答对第 5 题的概率；

（Ⅲ）定义统计量 $S=\frac{1}{n}[(P_1'-P_1)^2+(P_2'-P_2)^2+\cdots+(P_n'-P_n)^2]$，其中 P_i' 为第 i 题的实测难度，P_i 为第 i 题的预估难度 $(i=1,2,\cdots,n)$．规定：若 $S<0.05$，则称该次测试的难度预估合理，否则为不合理．判断本次测试的难度预估是否合理.

【解析】（Ⅰ）每道题实测的答对人数及相应的实测难度如下表：

题号	1	2	3	4	5
实测答对人数	8	8	7	7	2
实测难度	0.8	0.8	0.7	0.7	0.2

所以，估计 120 人中有 $120\times0.2=24$ 人答对第 5 题.

（Ⅱ）记编号为 i 的学生为 $A_i\left(i=1,2,3,4,5\right)$，从这 5 人中随机抽取 2 人，不同的抽取方法有 10 种.

其中恰好有 1 人答对第 5 题的抽取方法为 $\left(A_1,A_2\right)$，$\left(A_1,A_3\right)$，$\left(A_1,A_4\right)$，$\left(A_2,A_5\right)$，$\left(A_3,A_5\right)$，$\left(A_4,A_5\right)$，共 6 种．所以，从抽样的 10 名学生中随机抽取 2 名答对至少 4 道题的学生，恰好有 1 人答对第 5 题的概率为 $P=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$.

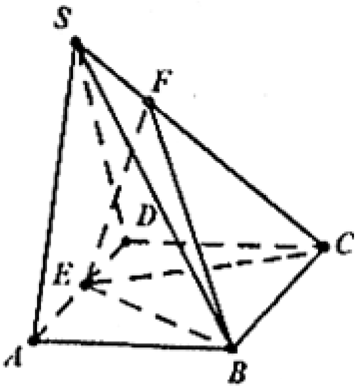
（Ⅲ）P_i' 为抽样的 10 名学生中第 i 题的实测难度，用 P_i' 作为这 120 名学生第 i 题的实测难度．$S=\frac{1}{5}\left[\left(0.8-0.9\right)^2+\left(0.8-0.8\right)^2+\left(0.7-0.7\right)^2+\left(0.7-0.6\right)^2+\left(0.2-0.4\right)^2\right]=0.012$.

因为 $S=0.012<0.05$，所以，该次测试的难度预估是合理的.

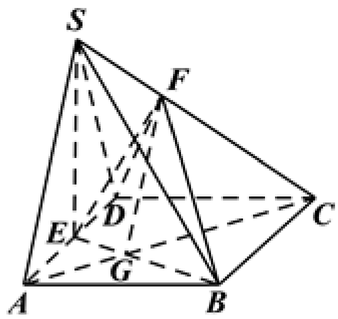
19.如图已知四棱锥 $S-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形，$\angle BAD=60^0$，$SA=SD=\sqrt{5}$，$SB=\sqrt{7}$，点 E 是棱 AD 的中点，点 F 在 SC 棱上，且 $\frac{SF}{SC}=\frac{1}{3}$，

（1）求证：$SA//$ 平面 BEF；

（2）求三棱锥 $F-EBC$ 的体积.



【解析】(Ⅰ)连接 AC，设 $AC\cap BE=G$，则平面 $SAC\cap$ 平面 $EFB=FG$，



（Ⅱ）$\because SA=SD=\sqrt{5},\therefore SE\perp AD,SE=2$，又

$\because AB=AD=2,\angle BAD=60^\circ,\therefore BE=\sqrt{3}$，$\therefore SE^2+BE^2=SB^2$，

$\therefore SE\perp BE$，　　$\therefore SE\perp$ 平面 $ABCD$，

所以 $V_{F-BCE}=\dfrac{2}{3}V_{S-EBC}=\dfrac{1}{3}V_{S-ABCD}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}\times2\times2\sin60^\circ\times2=\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$.

20.已知点 F 是抛物线 $C:x^2=2py\left(p>0\right)$ 的焦点，点 M 是抛物线上的定点，且 $\overline{MF}=\left(4,0\right)$.

(1) 求抛物线 C 的方程；

(2) 直线 AB 与抛物线 C 交于不同两点 $A\left(x_1,y_1\right),B\left(x_2,y_2\right)$，$\left|x_2-x_1\right|=3$, 直线 AB 与抛物线 C 的切线 l 平行，设切点为 N 点，试问$\triangle ABN$ 的面积是否是定值，若是，求出这个定值；若不是，请说明理由.

【答案】（1）$x^2=8y$.（2）见解析

【解析】(1) 设 $M\left(x_0,y_0\right)$，由题知 $F\left(0,\dfrac{p}{2}\right)$，所以 $\overline{MF}=\left(-x_0,\dfrac{p}{2}-y_0\right)=\left(4,0\right)$.

所以 $\begin{cases}-x_0=4.\\ \dfrac{p}{2}-y_0=0.\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x_0=-4,\\ y_0=\dfrac{p}{2}.\end{cases}$ 代入 $x^2=2py\left(p>0\right)$ 中得 $16=p^2$，解得 $p=4$.

所以抛物线 C 的方程为 $x^2=8y$.

(2) 有题意知，直线 AB 的斜率存在，设其方程为 $y=kx+b$. 由 $\begin{cases}y=kx+b.\\ x^2=8y.\end{cases}$ 消去 y，整理得 $x^2-8kx-8b=0$,

则 $x_1+x_2=8k,x_1x_2=-8b.\therefore y_1+y_2=k\left(x_1+x_2\right)+2b=8k^2+2b$,

设 AB 的中点为 Q，则点 Q 的坐标为 $\left(4k,4k^2+b\right)$. 由条件设切线方程为 $y=kx+t$.

由 $\begin{cases} y=kx+t. \\ x^2=8y. \end{cases}$ 消去 y，整理得 $x^2-8kx-8t=0$, $\because$ 直线与抛物线相切，$\therefore \Delta=64k^2+32t=0$.

$\therefore t=-2k^2$. $\therefore x^2-8kx-16k^2=0$, $\therefore y=2k^2$. $\therefore$ 切点 N 的坐标为 $\left(4k,2k^2\right)$，

$\therefore NQ\perp x$ 轴，$\therefore |NQ|=\left(4k^2+b\right)-2k^2=2k^2+b$. $\because |x_2-x_1|=3$.

又 $\because \left(x_2-x_1\right)^2=\left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2=64k^2+32b$. $\therefore 2k^2+b=\dfrac{9}{32}$.

$\therefore S_{\triangle ANM}=\dfrac{1}{2}|NQ||x_2-x_1|=\dfrac{1}{2}\left(2k^2+b\right)|x_2-x_1|=\dfrac{27}{64}$. $\therefore \triangle ABN$ 的面积为定值，且定值为 $\dfrac{27}{64}$.

21.设 $f(x)=xe^x-ax^2, g(x)=1nx+x-x^2+1-\dfrac{e}{a}$.

（1）求 $g(x)$ 的单调区间；

（2）讨论 $f(x)$ 零点的个数；

（3）当 $a>0$ 时，设 $h(x)=f(x)-ag(x)\geq 0$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

【答案】(1) $g(x)$ 的单调递增区间为 $(0,1)$，单调递减区间为 $(1,+\infty)$. (2) 见解析；(3) $0<a\leq e$

【解析】(1) $g'(x)=1+\dfrac{1}{x}-2x=\dfrac{-(2x+1)(x-1)}{x}$，当 $x\in(0,1)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 递增，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g'(x)<0$，g(x) 递减, 故 $g(x)$ 的单调递增区间为 $(0,1)$，单调递减区间为 $(1,+\infty)$.

（2）$x=0$ 是 f(x) 的一个零点，当 $x\neq 0$ 时，由 f(x)=0 得，$a=\dfrac{e^x}{x}=F(x)$，$F'(x)=\dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$，

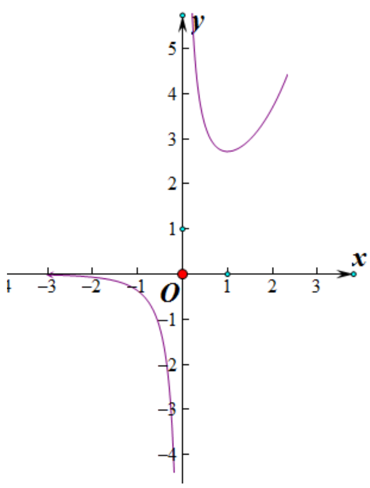
当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$F(x)$ 递减且 $F(x)<0$，当 $x>0$ 时，$F(x)>0$，且

$x\in(0,1)$ 时，$F(x)$ 递减，

$x\in(1,+\infty)$ 时，$F(x)$ 递增，故，$F(x)_{min}=F(1)=e$，大致图像如图，

$\therefore$ 当 $0\leq a<e$ 时，f(x) 有 1 个零点；当 a=e 或 $a<0$ 时，f(x) 有 2 个零点；；

当 $a>e$ 时，$f(x)$ 有 3 个零点.



（3）$h(x)=f(x)-ag(x)=xe^x-alnx-ax-a+e$，

$h'(x)=(x+1)e^{x}-\dfrac{a(x-1)}{x}=(x+1)\left(e^{x}-\dfrac{a}{x}\right)$, a > 0 设 $h'(x)=0$ 的根为 x_0，即有 $e^{x_0}=\dfrac{a}{x_0}$，可得

$x_0=lna-lnx_0$， $x\in(0,x_0)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 递减，当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 递增，

$\therefore\ h(x)_{\min}=h(x_0)=x_0e^{x_0}-a\ln x_0-ax_0-a+e=x_0\dfrac{a}{x_0}+a(x_0-\ln a)-ax_0-a+e=e-a\ln a\geq 0$，

$\therefore\ 0<a\leq e$

22.在直角坐标系 xOy 中，设直线 $l:\begin{cases}x=2-t\\ y=2t\end{cases}$（$t$ 为参数），曲线 $C_1:\begin{cases}x=2+2cos\theta\\ y=2sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数），在以 O 为极点、x 正半轴为极轴的极坐标系中：

（1）求 C_1 和 l 的极坐标方程：

（2）设曲线 $C_2:\rho=4\sin\theta$. 曲线 $\theta=\alpha(\rho>0,\dfrac{\pi}{4}<\alpha<\dfrac{\pi}{2})$，分别与 C_1、C_2 交于 A、B 两点，若 AB 的中点在直线 l 上，求 $|AB|$.

【解析】（1）消去 θ 可得 $C_1:(x-2)^2+y^2=4$，即 $x^2+y^2-4x=0$，化为极坐标：$\rho=4\cos\theta$，

消去 t 可得 $l:2x+y-4=0$，化为极坐标：$2\rho\cos\theta+\rho\sin\theta-4=0$.

（2）AB 中点的极径为 $\dfrac{\rho_A+\rho_B}{2}=2(\sin\alpha+\cos\alpha)$，将 $(2\sin\alpha+2\cos\alpha,\alpha)$ 代入 $2\rho\cos\theta+\rho\sin\theta-4=0$ 中，化简得：$3\sin\alpha\cos\alpha-\sin^2\alpha=0$，故 $\tan\alpha=3$，

故 $\sin\alpha=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$，$\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$，$|AB|=|\rho_A-\rho_B|=4|\sin\alpha-\cos\alpha|=\dfrac{4\sqrt{10}}{5}$.

23.已知关于 x 的不等式 $|2x|+|2x-1|\leq m$ 有解.

（1）求实数 m 的取值范围；

（2）已知 $a>0,b>0,a+b=m$，证明：$\dfrac{a^2}{a+2b}+\dfrac{b^2}{2a+b}\geq\dfrac{1}{3}$.

【解析】（Ⅰ）$|2x|+|2x-1|\geq|2x-(2x-1)|=1$，故 $m\geq 1$；

（Ⅱ）由题知 $a+b\geq 1$，故 $\left(\dfrac{a^2}{a+2b}+\dfrac{b^2}{2a+b}\right)(a+2b+2a+b)\geq(a+b)^2$，$\therefore\dfrac{a^2}{a+2b}+\dfrac{b^2}{2a+b}\geq\dfrac{1}{3}(a+b)\geq\dfrac{1}{3}$