长郡中学 2020 届高三停课不停学阶段性测试
理科数学试题参考答案

一．选择题

1.若 i 为虚数单位，复数 z 满足 $z(1+i)=|1-i|+i$，则 z 的虚部为（ D ）

A．$\frac{\sqrt{2}-1}{2}$　　B．$\sqrt{2}-1$　　C．$\frac{-\sqrt{2}+1}{2}i$　　D．$\frac{1-\sqrt{2}}{2}$

2．设集合 $A=\left\{x\left|\frac{x+3}{x-1}<0\right.\right\}$，$B=\{x|x\leqslant-3\}$，则集合 $\{x|x\geqslant1\}=$（ D ）

A．$A\cap B$　　B．$A\cup B$

C．$(\complement_R A)\cup(\complement_R B)$　　D．$(\complement_R A)\cap(\complement_R B)$

3．中国古代数学著作《九章算术》中有这样一个问题："某贾人擅营，月入益功疾（注：从第 2 月开始，每月比前一月多入相同量的铜钱），3 月入 25 贯，全年（按 12 个月计）共入 510 贯"，则该人 12 月营收贯数为（ C ）

A．35　　B．65　　C．70　　D．60

4．"石头、剪刀、布"，又称"猜丁壳"，是一种流传多年的猜拳游戏，起源于中国，然后传到日本、朝鲜等地，随着亚欧贸易的不断发展，它传到了欧洲，到了近代逐渐风靡世界．其游戏规则是：出拳之前双方齐喊口令，然后在话音刚落时同时出拳，握紧的拳头代表"石头"，食指和中指伸出代表"剪刀"，五指伸开代表"布"．"石头"胜"剪刀"、"剪刀"胜"布"、而"布"又胜过"石头"．若所出的拳相同，则为和局．小千和大年两位同学进行"五局三胜制"的"石头、剪刀、布"游戏比赛，则小千和大年比赛至第四局小千胜出的概率是（ B ）

A．$\frac{1}{27}$　　B．$\frac{2}{27}$　　C．$\frac{2}{81}$　　D．$\frac{8}{81}$

5．已知 $a=\log_{0.6}2$，$b=\log_2 0.6$，$c=0.6^2$，则（ C ）

A．a＞b＞c　　B．b＞c＞a　　C．c＞b＞a　　D．c＞a＞b

6.椭圆 $C:\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$，$F_1,F_2$ 是其焦点，点 P 是椭圆 C 上一点，若 ΔF_1PF_2 是直角三角形，则点 P 到 x 轴的距离为（ A ）

A．$\frac{5}{3}$　　B．$\frac{5}{2}$　　C．$\sqrt{5}$　　D．$2\sqrt{5}$

7.若α为锐角，且 $(4\cos 50^{\circ}-\tan 40^{\circ})\tan\alpha=1$ 则$\alpha=$（ D ）

A． 60°　　　B．50°　　　C．40°　　　D． 30°

8．设等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，公比为q，且S_3，S_9，S_6成等差数列，则$8q^3$等于（ B ）

A．-2　　　B．-4　　　C．2　　　D．4

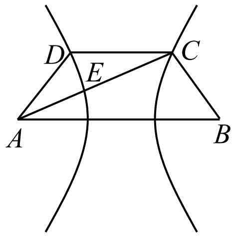
9．在平面直角坐标系xOy中，圆C的方程为$x^2+y^2-8x+15=0$，若直线$y=kx+2$上至少存在一点，使得以该点为圆心，半径为 1 的圆与圆C有公共点，则k的最小值是（ A ）

A、$-\dfrac{4}{3}$　　　B、$-\dfrac{5}{4}$　　　C、$-\dfrac{3}{5}$　　　D、$-\dfrac{5}{3}$

10. 已知函数 $f(x)=a\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x$ 的图象关于直线 $x=-\dfrac{\pi}{12}$ 对称，若 $f(x_1)\cdot f(x_2)=-4$，则$|x_1-x_2|$的最小值为(D)

A.$\dfrac{\pi}{3}$　　　B.$\dfrac{2\pi}{3}$　　　C.$\dfrac{\pi}{4}$　　　D.$\dfrac{\pi}{2}$

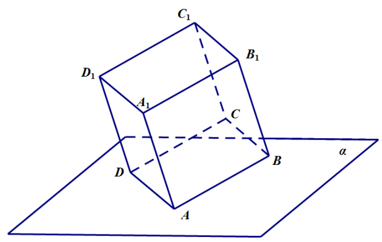
11．如图，在梯形$ABCD$中，已知$|AB|=2|CD|$，$\overrightarrow{AE}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$，双曲线过$C$，$D$，$E$三点，且以$A$，$B$为焦点，则双曲线的离心率为（ A）



A．$\sqrt{7}$　　　B．$2\sqrt{2}$

C．3　　　D．$\sqrt{10}$

12. 如图，棱长为4的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$，点A在平面α内，平面$ABCD$与平面α所成的二面角为30^0，则顶点C_1到平面α的距离的最大值是（ B ）



题8图

A. $2\left(2+\sqrt{2}\right)$　　　B. $2\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$

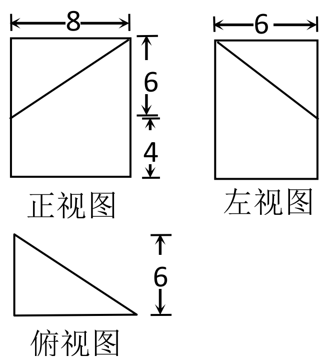
C. $2\left(\sqrt{3}+1\right)$　　　D. $2\left(\sqrt{2}+1\right)$

二．填空题

13. 已知$n=\dfrac{12}{\pi}\int_{-1}^{1}(\sqrt{1-x^2}-2x)dx$，则$x\left(1-\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)^n$的展开式中的常数项为____60_____

14. 某封闭几何体的三视图如图所示，

则该几何体的表面积为__$222+6\sqrt{41}$_______



15．对于数列$\{a_n\}$，若$\forall m$，$n\in\mathbf{N}^*$（$m\neq n$），都有$\frac{a_m-a_n}{m-n}\geqslant t$（$t$为常数）成立，则称数列$\{a_n\}$具有性质$P(t)$． 若数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=n^2-\frac{a}{n}$，且具有性质$P(10)$，则实数$a$的取值范围是$[36,+\infty)$________

16．若$\forall x\in[e,+\infty)$，满足$2x^3\ln x-me^{\frac{m}{x}}\geq 0$恒成立，则实数$m$的取值范围为_$(-\infty,2e]$___.

【详解】（1）$m\leq 0$，显然成立；

（2）$m>0$时，由$2x^3\ln x-me^{\frac{m}{x}}\geq 0\Rightarrow 2x^2\ln x\geq\frac{m}{x}e^{\frac{m}{x}}\Rightarrow(2\ln x)e^{2\ln x}\geq\frac{m}{x}e^{\frac{m}{x}}$，

由$f(x)=xe^x$在$[e,+\infty)$为增$\Rightarrow 2\ln x\geq\frac{m}{x}\Rightarrow m\leq 2x\ln x$在$[e,+\infty)$恒成立，

由$g(x)=2x\ln x$在$[e,+\infty)$为增，$g(x)_{\min}=2e$，$0<m\leq 2e$，

综上，$m\leq 2e$，故答案为$(-\infty,2e]$.

三．解答题

17．已知在ΔABC中，a,b,c分别为角A,B,C的对应边，点D为BC边的中点，ΔABC的面积为$\frac{AD^2}{3\sin B}$.

(1)求$\sin\angle BAD\cdot\sin\angle BDA$的值；

(2)若$BC=6AB, AD=2\sqrt{2}$，求b。

解:(1)由ΔABC的面积为$\frac{AD^2}{3\sin B}$且D为BC的中点可知:ΔABD的面积为$\frac{AD^2}{6\sin B}$……1分

由三角形的面积公式可知:$\frac{1}{2}AB\cdot BD\cdot\sin B=\frac{AD^2}{6\sin B}$ …………3分

由正弦定理可得:$3\sin\angle BAD\cdot\sin\angle BDA=1$ ……………………5分

所以$\sin\angle BAD\cdot\sin\angle BDA=\frac{1}{3}$ ………………………6分

(2)$\because BC=6AB$，又因为D为中点，所以BC=2BD=6AB，即BD=3AB…………7分

在ΔABD中由正弦定理可得$\frac{BD}{\sin\angle BAD}=\frac{AB}{\sin\angle BDA}$，所以$\sin\angle BAD=3\sin\angle BDA$

由（1）可知$\sin\angle BAD\cdot\sin\angle BDA=\frac{1}{3}$所以$\sin\angle BDA=\frac{1}{3},\sin\angle BAD=1$,

$\because\angle BAD\in(0,\pi)$ $\therefore\angle BAD=\frac{\pi}{2}$,……………9分

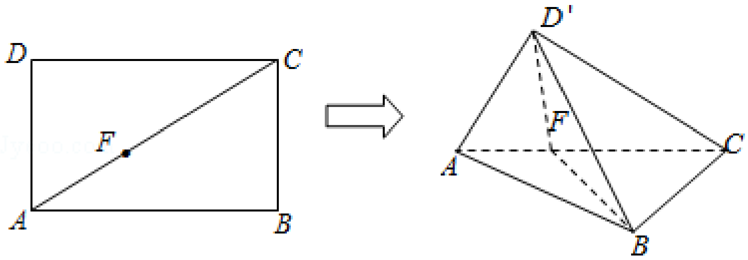
在直角ΔABD中$AD=2\sqrt{2},\sin\angle BDA=\frac{1}{3}$,所以$AB=1,BD=3$.………10 分

∵BC=2BD, ∴BC=6

在ΔABC中用余弦定理,

可得$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=1+36-2\times1\times6\times\frac{1}{3}=33,\therefore b=\sqrt{33}$.…12

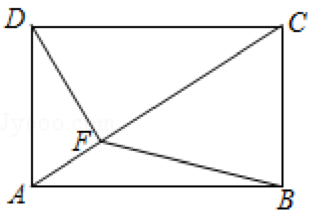
18．如图，矩形 ABCD 中，AB=6，$AD=2\sqrt{3}$，点 F 是 AC 上的动点．现将矩形 ABCD 沿着对角线 AC 折成二面角 D' - AC - B，使得$D'B=\sqrt{30}$.



(1)求证：当$AF=\sqrt{3}$时，D'F⊥BC；

(2)试求 CF 的长，使得二面角 A - D'F - B 的大小为$\frac{\pi}{4}$.

【解答】(1)证明：连结 DF，BF．

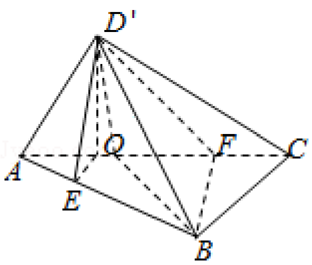


在矩形 ABCD 中，$AD=2\sqrt{3}$，CD=6，∴$AC=4\sqrt{3}$，$\angle CAB=30^0$，∠DAC=60°．…（1 分）

在△ADF 中，∵$AF=\sqrt{3}$，∴$DF^2=DA^2+AF^2-2DA\cdot AF\cdot\cos\angle DAC=9$,．……..（2 分）

∵$DF^2+AF^2=9+3=DA^2$，∴DF⊥AC，即 D'F⊥AC．…（3 分）

又在△ABF 中，$BF^2=AB^2+AF^2-2AB\cdot AF\cdot\cos\angle CAB=21$，……………………..（4 分）



∴在△D'FB 中，$D'F^2+FB^2=3^2+(\sqrt{21})^2=D'B^2$，∴BF⊥D'F，………（5 分）

又∵AC∩FB=F，

∴D'F⊥平面 ABC．

∴D'F⊥BC．……………..（6 分）

(2)解：在矩形 ABCD 中，过 D 作 DE⊥AC 于 O，并延长交 AB 于 E．沿着对角线 AC 翻折后，

由（I）可知，OE，OC，OD'两两垂直，

以 O 为原点，$\overrightarrow{OE}$的方向为 x 轴的正方向建立空间直角坐标系 O﹣xyz，则 O（0，0，0），E（1，0，0），$D'(0,0,3)$，$B(3,2\sqrt{3},0)$，…………………..（7 分

）k_{AB}=﹣1 平面 AD'F，∴$\overrightarrow{OE}=(1,0,0)$为平面 AD'F 的一个法向量． ……………..（8 分）

设平面 BD'F 的法向量为$\overrightarrow{n}$=（x，y，z），∵F（0，t，0），

∴$\overrightarrow{BD'}=(-3,-2\sqrt{3},3)$，$\overrightarrow{BF}=(-3,t-2\sqrt{3},0)$，

由$\begin{cases}\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{BD'}=0\\ \overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{BF}=0\end{cases}$得$\begin{cases}-3x-2\sqrt{3}y+3z=0\\ -3x+(t-2\sqrt{3})y=0\end{cases}$

取 y=3，则$x=t-2\sqrt{3}$，$z=t$，∴$\overrightarrow{n}=(t-2\sqrt{3},3,t)$．………………………（10 分）

∴$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{|\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{OE}|}{|\overrightarrow{n}||\overrightarrow{OE}|}$，即$\frac{|t-2\sqrt{3}|}{\sqrt{(t-2\sqrt{3})^2+9+t^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，∴$t=\frac{\sqrt{3}}{4}$．∴当$CF=\frac{11}{4}\sqrt{3}$时，

二面角 A﹣D'F﹣B 的大小是$\frac{\pi}{4}$． ………………（12 分）

19.已知 F 为抛物线$C:y^2=2px\left(p>0\right)$的焦点，过 F 的动直线交抛物线 C 于 A，B 两点．当直线与 x 轴垂直时，$|AB|=4$．

(1)求抛物线 C 的方程；

(2)若直线 AB 与抛物线的准线 l 相交于点 M，在抛物线 C 上是否存在点 P，使得直线 PA，PM，PB 的斜率成等差数列?若存在，求出点 P 的坐标；若不存在，说明理由．

解：(1) $y^2=4x$……………………………………4 分

(2) $P(1,\pm2)$ 为所求…………………………………12 分

20．已知函数 f（x）=e^{-x} - ax（x∈R）.

(1)当 a=－1 时，求函数 f（x）的最小值；

(2)若 x≥0 时，f（－x）+ln（x+1）≥1，求实数 a 的取值范围；

【解答】解：(1)当 a=－1 时，f（x）=e^{-x}+x，

则$f'(x)=-\frac{1}{e^x}+1$．…1 分

令 f'（x）=0，得 x=0.

当 x＜0 时，f'（x）＜0； 当 x＞0 时，f'（x）＞0．…...................2 分

∴函数 f（x）在区间（－∞，0）上单调递减，在区间（0，+∞）上单调递增.

∴当 x=0 时，函数 f（x）取得最小值，其值为 f（0）=1．…....................4 分

(2)若 x≥0 时，f（－x）+ln（x+1）≥1，

即 e^x+ax+ln（x+1）－1≥0.（*）

令 g（x）=e^x+ax+ln（x+1）－1，

则$g'(x)=e^x+\frac{1}{x+1}+a$.

①若 a≥－2，由（I）知 e^{-x}+x≥1，即 e^{-x}≥1－x，故 e^x≥1+x.

∴$g'(x)=e^x+\frac{1}{x+1}+a\geqslant(x+1)+\frac{1}{x+1}+a\geqslant2\sqrt{(x+1)\cdot\frac{1}{x+1}}+a=2+a\geqslant0$. …..........6 分

∴函数 g（x）在区间[0，+∞）上单调递增.

∴g（x）≥g（0）=0.

∴（*）式成立．….....................................7 分

②若 a＜－2，令$\phi(x)=e^x+\frac{1}{x+1}+a$，

则$\phi'(x)=e^x-\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{(x+1)^2e^x-1}{(x+1)^2}\geqslant0$.

∴函数 φ（x）在区间[0，+∞）上单调递增.

由于 φ（0）=2+a<0，

$\phi(-a)=e^{-a}+\frac{1}{1-a}+a\geqslant 1-a+\frac{1}{1-a}+a=1+\frac{1}{1-a}>0$． ……………………………8 分

故∃x_0∈（0，﹣a），使得 φ（x_0）=0．…7 分

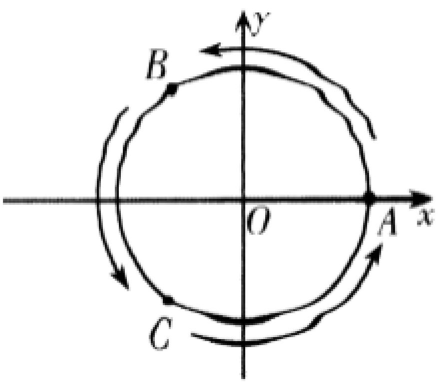
则当 0<x<x_0时，φ（x）<φ（x_0）=0，即 g'（x）<0．

∴函数 g（x）在区间（0，x_0）上单调递减．

∴g（x_0）<g（0）=0，即（*）式不恒成立．…………………………………….11 分

综上所述，实数 a 的取值范围是[﹣2，+∞)．……………………………………12 分

21．如图，直角坐标系中，圆的方程为$x^2+y^2=1$，$A(1,0)$，$B\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$C\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$为圆上三个定点，某同学从$A$点开始，用掷骰子的方法移动棋子．规定：①每掷一次骰子，把一枚棋子从一个定点沿圆弧移动到相邻下一个定点；②棋子移动的方向由掷骰子决定，若掷出骰子的点数为偶数，则按图中箭头方向移动；若掷出骰子的点数为奇数，则按图中箭头相反的方向移动．设掷骰子n次时，棋子移动到A，B，C处的概率分别为$P_n(A)$，$P_n(B)$，$P_n(C)$．例如：掷骰子一次时，棋子移动到A，B，C处的概率分别为$P_1(A)=O$，$P_1(B)=\frac{1}{2}$，$P_1(C)=\frac{1}{2}$．



（1）分别掷骰子二次，三次时，求棋子分别移动到A，B，C处的概率；

（2）掷骰子N次时，若以X轴非负半轴为始边，以射线OA，OB，OC为终边的角的余弦值记为随机变量X_n，求X_4的分布列和数学期望；

（3）记$P_n(A)=a_n$，$P_n(B)=b_n$，$P_n(C)=c_n$，其中$a_n+b_n+c_n=1$．证明：数列$\left\{b_n-\frac{1}{3}\right\}$

是等比数列，并求a_{2020}.

【解析】

（1）$P_2(A)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，$P_2(B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$，$P_2(C)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

$P_3(A)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$，$P_3(B)=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$，$P_3(C)=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$

综上，

棋子位置 掷骰子次数	A	B	C
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$

……………………………………………………………………………………6 分

（2）随机变量X_4的可能数值为 1，$-\frac{1}{2}$.

综合（1）得

$$P\left(X_4=1\right)=\left(P_3(B)+P_3(C)\right)\cdot\frac{1}{2}=\left(\frac{3}{8}+\frac{3}{8}\right)\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8},$$

$$P\left(X_4=-\frac{1}{2}\right)=\left(P_3(A)+P_3(C)\right)\cdot\frac{1}{2}+\left(P_3(A)+P_3(B)\right)\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{8},$$

故随机变量X_4的分布列为

X_4	1	$-\frac{1}{2}$
P	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{8}$

$E\left(X_4\right)=1\times\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\times\frac{5}{8}=\frac{1}{16}$……………………………………………………8 分

（3）易知$b_n=c_n$，因此，$b_{n-1}=c_{n-1}(n\geq 2)$

而当$n\ge 2$时，$b_n=\frac{1}{2}\left(a_{n-1}+c_{n-1}\right)=\frac{1}{2}\left(a_{n-1}+b_{n-1}\right)$，

又$a_{n-1}+b_{n-1}+c_{n-1}=1$，

即$2b_n+b_{n-1}=1$.

因此$b_n=\frac{1}{2}\left(1-2b_{n-1}+b_{n-1}\right)=-\frac{1}{2}b_{n-1}+\frac{1}{2}(n\ge 2)$，

故$b_n-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}b_{n-1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}b_{n-1}+\frac{1}{6}=-\frac{1}{2}\left(b_{n-1}-\frac{1}{3}\right)(n\ge 2)$

即数列$\left\{b_n-\frac{1}{3}\right\}$是以$b_1-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$为首项，公比为$-\frac{1}{2}$的等比数列.

所以$b_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$，

又$a_n=1-2b_n=1-2\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{3}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]$

故$a_{2020}=\frac{1}{3}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^{2019}\right]$……………………………………………………12 分

22．选修 4-4：坐标系与参数方程

在平面直角坐标系中，曲线$C_1:\begin{cases}x=3+3\cos\alpha\\ y=2\sin\alpha\end{cases}$（$\alpha$为参数）经过伸缩变换$\begin{cases}x'=\frac{x}{3}\\ y'=\frac{y}{2}\end{cases}$，后的曲线为$C_2$，以坐标原点为极点，$x$轴正半轴为极轴建立极坐标系.

（Ⅰ）求C_2的极坐标方程；

（Ⅱ）设曲线C_3的极坐标方程为$\rho\sin\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)=1$，且曲线$C_3$与曲线$C_2$相交于$P$，$Q$两点，求$|PQ|$的值.

解：（Ⅰ）由题意得曲线C_2的参数方程为$\begin{cases}x'=1+\cos\alpha\\y'=\sin\alpha\end{cases}$（$\alpha$为参数），

则曲线C_2的直角坐标方程为$(x'-1)^2+y'^2=1$，

所以曲线C_2的极坐标方程为$\rho=2\cos\theta$．

（Ⅱ）由（Ⅰ）知曲线C_2是以$(1,0)$为圆心，半径为 1 的圆，

而曲线C_3为直线，直角坐标方程为$x-\sqrt{3}y-2=0$．

曲线C_2的圆心$(1,0)$到直线C_3的距离$d=\dfrac{\left|1-\sqrt{3}\times 0-2\right|}{\sqrt{1+3}}=\dfrac{1}{2}$，

所以弦$|PQ|$的值为$2\sqrt{1^2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{3}$．

23．选修 4-5：不等式选讲

已知函数$f(x)=\left|x+b^2\right|-\left|-x+1\right|$，$g(x)=\left|x+a^2+c^2\right|+\left|x-2b^2\right|$，其中$a$，$b$，$c$均为正实数，且$ab+bc+ac=1$．

（Ⅰ）当$b=1$时，求不等式$f(x)\geqslant 1$的解集；

（Ⅱ）当$x\in R$时，求证$f(x)\leqslant g(x)$．

解：（Ⅰ）由题意，当$b=1$时，$f(x)=\begin{cases}-2, x\leqslant -1,\\2x, -1<x<1,\\2, x\geqslant 1.\end{cases}$

当$x\leqslant -1$时，$f(x)=-2<1$，不等式$f(x)\geqslant 1$无解；

当$-1<x<1$时，$f(x)=2x\geqslant 1$，解得$x\geqslant \dfrac{1}{2}$，所以$\dfrac{1}{2}\leqslant x<1$．

当$x\geqslant 1$时，$f(x)=2\geqslant 1$恒成立，

所以$f(x)\geqslant 1$的解集为$\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$．

（Ⅱ）当$x\in R$时，$f(x)=\left|x+b^2\right|-\left|-x+1\right|\leqslant\left|x+b^2+(-x+1)\right|=\left|b^2+1\right|=b^2+1$；

$g(x)=\left|x+a^2+c^2\right|+\left|x-2b^2\right|\geqslant\left|x+a^2+c^2-\left(x-2b^2\right)\right|=a^2+c^2+2b^2$．

而

$a^2+c^2+2b^2-\left(b^2+1\right)=a^2+c^2+b^2-1$ $=\frac{1}{2}\left(a^2+b^2+b^2+c^2+c^2+a^2\right)-1$

$\geqslant\frac{1}{2}\left(2ab+2bc+2ac\right)-1$

$=ab+bc+ac-1=0$

当且仅当$a=b=c=\frac{\sqrt{3}}{3}$时，等号成立，即$a^2+c^2+2b^2\geqslant b^2+1$，

因此，当$x\in R$时，$f\left(x\right)\leqslant b^2+1\leqslant a^2+c^2+2b^2\leqslant g\left(x\right)$，

所以，当$x\in R$时，$f\left(x\right)\leqslant g\left(x\right)$.