第 19 讲　导数及其应用

专题探究

【命题趋势】

2020 高考对本节内容的考查仍将突出导数的工具性，主要涉及导数及其运算，灵活运用导数公式及运算法则进行求导，理解导数的几何意义，会求切线方程. 题型选择、填空、解答均可出现，一般属于中档题目. 重点考查利用导数研究函数极值、最值及单调性问题和生活中的优化问题，这也是高考的必考点，其中蕴含对转化与化归、分类讨论和数形结合等数学思想方法的考查，综合性强，有一定难度，一般以大题的形式出现.

【备考建议】

新课标命题的高考中，导数属于高考重点考查的内容，在复习中应对这些问题予以关注：

(1)定积分的简单计算或利用定积分求某些图形的面积，确定或应用过某点的切线的斜率(方程)；

(2)利用函数的单调性与导数的关系，讨论含有参数的较复杂基本函数的单调性(区间)，根据函数的单调性，利用导数求某些参数的取值范围；

(3)利用函数的极值与导数的关系，求某些含有参数的较复杂基本函数的极值大小、个数或最值，根据函数极值的存在情况，利用导数求某些参数的取值范围. 要掌握解决这些问题的基本数学方法与数学思想，不断培养提高数形结合、转化与化归、分类讨论、函数与方程的数学思想.

典例剖析

探究一　定积分及其几何意义

例 1 (1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)dx=$________.

(2)若函数 $f(x)$，$g(x)$满足 $\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx=0$，则称 $f(x)$，$g(x)$为区间$[-1,1]$上的一组正交函数. 给出三组函数：

①$f(x)=\sin\frac{1}{2}x$，$g(x)=\cos\frac{1}{2}x$；②$f(x)=x+1$，$g(x)=x-1$；③$f(x)=x$，$g(x)=x^2$. 其中为区间$[-1,1]$上的正交函数的组数是　(　　)

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

【点评】定积分与微积分基本定理的常见题型有两类：一类是定积分的计算，关键是利用导数通过逆向思维找原函数；另一类是曲边多边形面积的计算，关键是通过数形结合确定被积函数.

探究二　导数的几何意义及应用

例 2 (1)已知曲线 $y=x+\ln x$ 在点(1,1)处的切线与曲线 $y=ax^2+(a+2)x+1$ 相切，则 $a=$________.

(2)设函数 $f(x)=\frac{3}{2}x^2-2ax(a>0)$与 $g(x)=a^2\ln x+b$ 有公共点，且在公共点处的切线方程相同，则实数 b 的最大值为　(　　)

A. $\frac{1}{2e^2}$　　B. $\frac{1}{2}e^2$　　C. $\frac{1}{e}$　　D. $-\frac{3}{2e^2}$

【点评】导数的几何意义是高考考查的热点. 在三类题型中均有可能考查，同时在解答题中进行考查时，综合性较强，往往综合考查方程与不等式知识，考查函数方程思想、数形结合思想、推理论证能力.

探究三　利用导数研究函数的单调性

例 3 已知函数 $f(x)=x\ln x$，$f'(x)$为 $f(x)$的导函数.

(1)令 $g(x)=f'(x)-ax^2$，试讨论函数 $g(x)$的单调区间；

(2)证明：$f(x)<2e^{x-2}$.

【点评】1. 利用导数研究函数的单调性时，一定要注意函数的定义域，单调区间和单调性必须在函数的定义域内进行研究；

2. “函数的单调增(或减)区间为 D”与“函数在区间 d 上单调增(或减)”是两个不同概念，一般 $d\subseteq D$.

3. 根据函数单调性求参数的一般思路：

(1)利用集合间的包含关系处理：函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 上单调，则区间 (a,b) 是相应单调区间的子集.

(2)转化为不等式的恒成立问题，即“若函数 $f(x)$ 单调递增，则 $f'(x)\geqslant 0$；若函数 $f(x)$ 单调递减，则 $f'(x)\leqslant 0$ 在区间上恒成立”来求解.

探究四　利用导数研究函数的极值、最值

例 4 (1)已知 $f(x)=x^3-3x+3-\frac{x}{e^x}$，$g(x)=-(x+1)^2+a$，若存在 $x_1\in[0,2]$，使得任意 $x_2\in[0,2]$ 都有 $f(x_1)\leqslant g(x_2)$ 成立，则实数 a 的取值范围是____________.

(2)已知函数 $f(x)=e^{2x}$，$g(x)=\ln x+\frac{1}{2}$，$\forall a\in\mathbf{R}$，$\exists b\in(0,+\infty)$，使得 $f(a)=g(b)$，则 $b-a$ 的最小值为 (　　)

A. $1+\frac{\ln 2}{2}$　　B. $1-\frac{\ln 2}{2}$

C. $2\sqrt{e}-1$　　D. $\sqrt{e}-1$

例 5 已知函数 $f(x)=x\ln x-\frac{a}{2}x^2(a\in\mathbf{R})$.

(1)若 $a=2$，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

(2)若 $g(x)=f(x)+(a-1)x$ 在 $x=1$ 处取得极小值，求实数 a 的取值范围.

【点评】1. 函数极值与最值为两个不同概念. 一般地，其研究思想是利用函数单调性.

2. 求函数极值、最值的步骤：

(1)确定函数的定义域；

(2)求方程 $f'(x)=0$ 的根；

(3)用方程 $f'(x)=0$ 的根顺次将函数的定义域分成若干个小开区间，并形成表格；

(4)由 $f'(x)=0$ 根的两侧导数的符号来判断 $f'(x)$ 在这个根处取极值的情况；

(5)将函数 $f(x)$ 的各极值与 $f(a)$，$f(b)$ 比较，其中最大的一个为最大值，最小的一个为最小值.

探究五　导数的综合应用

例 6 已知函数 $f(x)=ae^{2x}-ae^x-xe^x(a\geqslant 0$，$e=2.718\cdots$，e 为自然对数的底数)，若 $f(x)\geqslant 0$ 对于 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立.

(1)求实数 a 的值；

(2)证明：$f(x)$ 存在唯一极大值点 x_0，且 $\frac{\ln 2}{2e}+\frac{1}{4e^2}\leqslant f(x_0)<\frac{1}{4}$.

【点评】不等式恒成立问题一般转化为函数最值问题，利用导数求函数在闭区间上的最值问题，先对函数求导，再求导函数的零点，一般先看能不能因式分解，如果不能就要分三个方面考虑：一是导函数恒正或恒负；二是可观察出函数的零点，再通过二阶导数证明导函数单调，导函数只有唯一零点；三是导函数的零点不可求，我们一般称为隐零点，通过图象和根的存在性定理，先判定和设零点，后面一般需要回代消去隐零点或参数.

高考回眸

考题1［2018·全国卷Ⅰ］设函数 $f(x)=x^3+(a-1)x^2+ax$，若 $f(x)$ 为奇函数，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为　　(　　)

A. $y=-2x$

B. $y=-x$

C. $y=2x$

D. $y=x$

考题2［2017·全国卷Ⅱ］若 $x=-2$ 是函数 $f(x)=(x^2+ax-1)e^{x-1}$ 的极值点，则 $f(x)$ 的极小值为　　(　　)

A. -1

B. $-2e^{-3}$

C. $5e^{-3}$

D. 1

考题3［2019·全国卷Ⅱ］已知函数 $f(x)=\ln x-\dfrac{x+1}{x-1}$.

(1)讨论 $f(x)$ 的单调性，并证明 $f(x)$ 有且仅有两个零点；

(2)设 x_0 是 $f(x)$ 的一个零点，证明曲线 $y=\ln x$ 在点 $A(x_0,\ln x_0)$ 处的切线也是曲线 $y=e^x$ 的切线.

温馨提示：请完成考点限时训练(十九)p_{139}