第 20 讲　函数与不等式的综合问题

专题探究

【命题趋势】

函数、不等式、导数综合是历年高考命题的热点，多以解答题中压轴题的形式出现，除重点考查利用导数判断单调性和利用导数求极值、最值外，较多的还是导数与不等式的整合，即将求参数范围问题转化为求函数最值问题，通过构造函数，以导数为工具证明不等式问题，旨在考查学生思维能力及数学素养.

【备考建议】

函数与不等式的综合问题是新课标高考的命题热点之一，往往处在解答题压轴题的地位，具有一定的区分度，有一定的难度. 备考时需要明确以下几个问题的解决方法：

(1)利用构造函数的单调性解决不等式解集及比较数或式的大小；

(2)根据不等式恒成立、存在性成立求参数的取值范围；

(3)与不等式有关的证明. 不等式的证明常与函数、数列、导数综合在一起，证明过程中的构造函数法、数学归纳法、放缩法是高考命题的一个热点，其中放缩的"度"的把握更能显出解题的真功夫. 此外关于连续函数在闭区间上的最值定理及有高等数学背景的函数的凸凹性问题也值得关注. 这个考点考查函数与方程思想、化归与转化思想、分类与整合思想、数形结合思想等，还要培养提高推理论证能力、运算求解能力、创新意识等.

典例剖析

探究一　两个数或式的大小比较

例 1 (1)已知 $y=f(x)$ 为 $(0,+\infty)$ 上的可导函数，且 $(x+1)f'(x)>f(x)$，则下列不等式一定成立的是　(　　)

A. $3f(4)<4f(3)$

B. $3f(4)>4f(3)$

C. $3f(3)<4f(2)$

D. $3f(3)>4f(2)$

(2)已知函数 $f(x)=ax^2+bx-\ln x(a>0,b\in\mathbf{R})$，若对任意 $x>0$，$f(x)\geqslant f(1)$，则　(　　)

A. $\ln a<-2b$

B. $\ln a\leqslant-2b$

C. $\ln a>-2b$

D. $\ln a\geqslant-2b$

(3)已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$f'(x)$ 为函数 $f(x)$ 的导函数，当 $x\in[0,+\infty)$ 时，$2\sin x\cos x-f'(x)>0$ 且 $\forall x\in\mathbf{R}$，$f(-x)+f(x)+\cos 2x=1$. 则下列不等式一定正确的是　(　　)

A. $\frac{1}{4}-f\left(-\frac{5\pi}{6}\right)>\frac{3}{4}-f\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$

B. $\frac{1}{4}-f\left(-\frac{5\pi}{6}\right)>\frac{3}{4}-f\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$

C. $\frac{3}{4}-f\left(\frac{\pi}{3}\right)>\frac{1}{2}-f\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

D. $\frac{1}{2}-f\left(-\frac{3\pi}{4}\right)>\frac{3}{4}-f\left(\frac{\pi}{3}\right)$

【点评】求解函数、不等式、导数的综合问题要综合运用所学的数学思想方法来分析问题，并及时地进行思维的转换，将问题等价转化.

探究二　不等式的存在性、恒成立问题

例 2 (1)函数 $f(x)=(kx+4)\ln x-x(x>1)$，若 $f(x)>0$ 的解集为 (s,t)，且 (s,t) 中只有一个整数，则实数 k 的取值范围为　(　　)

A. $\left(\frac{1}{\ln 2}-2,\frac{1}{\ln 3}-\frac{4}{3}\right)$

B. $\left(\frac{1}{\ln 2}-2,\frac{1}{\ln 3}-\frac{4}{3}\right]$

C. $\left(\frac{1}{\ln 3}-\frac{4}{3},\frac{1}{2\ln 2}-1\right]$

D. $\left(\frac{1}{\ln 3}-\frac{4}{3},\frac{1}{2\ln 2}-1\right)$

【点评】利用导数解决不等式存在性问题的方法与技巧. 根据条件将问题转化为某函数在该区间上最大(小)值满足的不等式成立问题，进而用导数求该函数在该区间上的最值问题，最后构建不等式求解.

(2)已知函数 $f(x)=(x+1)e^x-\frac{1}{2}x^2-ax(a\in\mathbf{R}$，e 是自然对数的底数)在 $(0,f(0))$ 处的切线与 x 轴平行.

(ⅰ)求函数 $f(x)$的单调递增区间；

(ⅱ)设 $g(x)=(e^x+m-2)x-\frac{1}{2}x^2+n$.若 $\forall x\in\mathbf{R}$,不等式 $f(x)\geqslant g(x)$恒成立,求 $2m+n$ 的最大值.

【点评】利用导数解决不等式恒成立问题的两种常用方法

(1)分离参数法:

第一步:将不等式分离参数,转化为不含参数的函数的恒成立问题;

第二步:利用导数求该函数的最值;

第三步:根据要求求得所求范围.

(2)函数思想法:

第一步:将不等式转化为某含待求参数的函数的最值问题;

第二步:利用导数求该函数的极值(最值);

第三步:构建不等式求解.

探究三　与不等式有关的参变量问题

例 3 已知函数 $f(x)=x^2-2x+a\ln x(a>0)$.

(1)当 $a=1$ 时,若关于 x 的方程 $f(x)=x+b$ 有唯一实数解,试求实数 b 的取值范围;

(2)若函数 $f(x)$有两个极值点 x_1、$x_2(x_1<x_2)$,且不等式$f(x_1)\geqslant m\cdot x_2$ 恒成立,试求实数 m 的取值范围.

【点评】(1)含参数的不等式恒成立与能成立问题的求解,要注意两者之间的区别.若 $f(x)<a$ 在$[m,n]$上恒成立,则 $a>f(x)_{\max}$;若 $f(x)<a$ 在$[m,n]$上有解,则 $a>f(x)_{\min}$;若 $f(x)>a$ 在$[m,n]$上恒成立,则 $a<f(x)_{\min}$;若 $f(x)>a$ 在$[m,n]$上有解,则 $a<f(x)_{\max}$.

(2)含参数的不等式恒成立的求解若不便变量分离,可应用猜证法先猜得可能恒成立的参变量的范围后推理论证猜想正确,然后应用补集思想说明其他取值范围不符合题设条件.

探究四　不等式的证明问题

例 4 已知 $f(x)=a\sin x(a\in\mathbf{R})$,$g(x)=e^x$.

(1)若 $0<a\leqslant 1$,判断函数 $G(x)=f(1-x)+\ln x$ 在$(0,1)$上的单调性;

(2)证明:$\sin\frac{1}{2^2}+\sin\frac{1}{3^2}+\sin\frac{1}{4^2}+\cdots+\sin\frac{1}{(n+1)^2}<\ln 2$;

(3)设 $F(x)=g(x)-mx^2-2(x+1)+k(k\in\mathbf{R})$,对$\forall x>0$,$m<0$,有 $F(x)>0$ 恒成立,求 k 的最小值.

【点评】1.利用导数证明不等式的基本步骤:

(1)作差或变形;

(2)构造新的函数;

(3)对新函数求导;

(4)根据新函数的导函数判断新函数的单调性或最值;

(5)结论.

2.构造函数证明不等式的技巧:

(1)移项法:证明不等式 $f(x)>g(x)(f(x)<g(x))$的问题转化为证明 $f(x)-g(x)>0(f(x)-g(x)<0)$,进而构造辅助函数 $h(x)=f(x)-g(x)$;

(2)构造"形似"函数:对原不等式同解变形,如移项、通分、取对数;把不等式转化为左右两边是相同结构的式子的结构,根据"相同结构"构造辅助函数;

(3)主元法:对于(或可化为)$f(x_1,x_2)\geqslant A$ 的不等式,可选 x_1(或 x_2)为主元,构造函数 $f(x,x_2)$(或 $f(x_1,x)$);

(4)放缩法:若所构造函数最值不易求解,可将所证明不等式进行放缩,再重新构造函数.

例 5 已知 $f(x)=x^2+ax+\sin\dfrac{\pi}{2}x, x\in(0,1)$.

(1)若 $f(x)$在定义域内单调递增,求 a 的取值范围;

(2)当 $a=-2$ 时,记 $f(x)$的极小值为 $f(x_0)$. 若 $f(x_1)=f(x_2)$,求证:$x_1+x_2>2x_0$.

【点评】解决函数与不等式大题的解题技巧:

(1)树立服务意识:所谓"服务意识"是指利用给定函数的某些性质(一般第一问先让解决出来),如函数的单调性、最值等,服务于第二问要证明的不等式.

(2)强化变形技巧:所谓"强化变形技巧"是指对于给出的不等式直接证明无法下手,可考虑对不等式进行必要的等价变形后,再去证明,例如采用两边取对数(指数)、移项通分等等,要注意变形的方向:因为要利用函数的性质,力求变形后不等式一边需要出现函数关系式.

(3)巧妙构造函数:所谓"巧妙构造函数"是指根据不等式的结构特征,构造函数,利用函数的最值进行解决.在构造函数的时候灵活多样,注意积累经验,体现一个"巧妙".

高考回眸

考题 1 [2016·新课标Ⅰ]若 $a>b>1, 0<c<1$,则 ( )

A. $a^c<b^c$

B. $ab^c<ba^c$

C. $a\log_b c<b\log_a c$

D. $\log_a c<\log_b c$

考题 2 [2017·全国卷Ⅲ]已知函数 $f(x)=x-1-a\ln x$.

(1)若 $f(x)\geqslant 0$,求 a 的值;

(2)设 m 为整数,且对于任意正整数 n,$\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{2^n}\right)<m$,求 m 的最小值.

考题 3 [2018·全国卷Ⅰ]已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}-x+a\ln x$.

(1)讨论 $f(x)$的单调性;

(2)若 $f(x)$存在两个极值点 x_1, x_2,证明:$\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<a-2$.

温馨提示:请完成考点限时训练(二十)p_{141}