

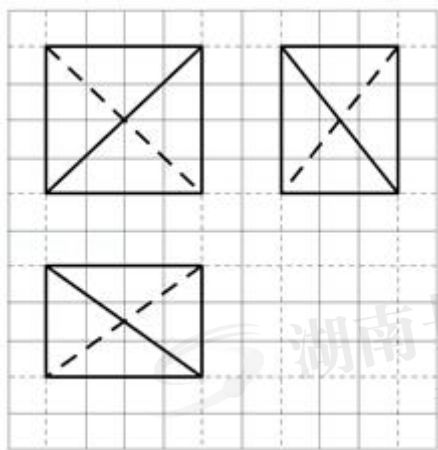
周考试卷 2

一. 选择题 (共 12 小题)

- 已知集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{0, 2, 4, 6\}$, 则集合 $A \cap B$ 的子集共有 ()
A. 2 个 B. 4 个 C. 6 个 D. 8 个
- 若复数 $z = \frac{a+2i}{1-i}$ 的实部为 0, 其中 a 为实数, 则 $|z| =$ ()
A. 2 B. $\sqrt{2}$ C. 1 D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- 已知向量 $\overrightarrow{OA} = (-1, k)$, $\overrightarrow{OB} = (1, 2)$, $\overrightarrow{OC} = (k+2, 0)$, 且实数 $k > 0$, 若 A, B, C 三点共线, 则 $k =$ ()
A. 0 B. 1 C. 2 D. 3
- 意大利数学家斐波那契的《算经》中记载了一个有趣的问题: 已知一对兔子每个月可以生一对兔子, 而一对兔子出生后在第二个月就开始生小兔子. 假如没有发生死亡现象, 那么兔子对数依次为: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144……, 这就是著名的斐波那契数列, 它的递推公式是 $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ ($n \geq 3, n \in \mathbb{N}^*$), 其中 $a_1 = 1, a_2 = 1$. 若从该数列的前 100 项中随机地抽取一个数, 则这个数是偶数的概率为 ()
A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{33}{100}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{67}{100}$
- 设 $a = 0.3^{\sqrt{2}}$, $b = (\sqrt{2})^{0.3}$, $c = \log_{0.3} \sqrt{2}$, 则下列正确的是 ()
A. $a > b > c$ B. $a > c > b$ C. $c > a > b$ D. $b > a > c$
- 甲乙两名同学近几次信息技术比赛 (满分为 26 分) 得分统计成绩茎叶图如图, 若甲乙比赛成绩的平均数与中位数分别相等, 则有序数对 (x, y) 为 ()

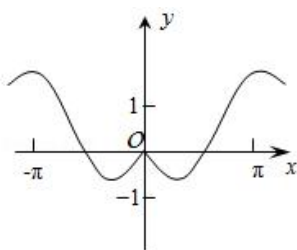
甲					乙	
5				1	8	
5	x	1		2	y	3

A. (3, 2) B. (2, 3)
C. (3, 1) 或 (7, 5) D. (3, 2) 或 (7, 5)
- 若双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的焦距为 $2\sqrt{5}$, 且渐近线经过点 $(1, -2)$, 则此双曲线的方程为 ()
A. $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ B. $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ C. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$ D. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$
- 如图, 网格纸上小正方形的边长为 1, 粗线画出的是由一个长方体切割而成的三棱锥的三视图, 则该三棱锥的体积为 ()

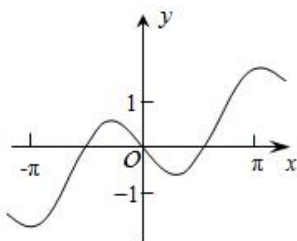


- A. 12 B. 16 C. 24 D. 32

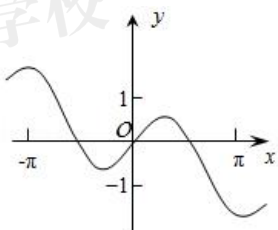
9. 函数 $f(x) = \cos x \cdot \ln(\sqrt{x^2+1} - x)$ 的图象大致为 ()



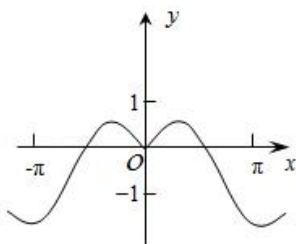
A.



B.



C.



D.

10. 将正方形 $ABCD$ 沿对角线 AC 折成一个直二面角 $B-AC-D$, 则异面直线 AB 和 CD 所成角的余弦值为 ()

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

11. 如图, 方格蜘蛛网是由一族正方形环绕而成的图形. 每个正方形的四个顶点都在其外接正方形的四边上, 且分边长为 3: 4. 现用 13 米长的铁丝材料制作一个方格蜘蛛网, 若最外边的正方形边长为 1 米, 由外到内顺序制作, 则完整的正方形的个数最多为 (参考数据: $18\frac{7}{5} \approx 0.15$) ()



A. 6 个

B. 7 个

C. 8 个

D. 9 个

12. 设定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = 2f(x+1)$, 且当 $x \in [-1, 0)$ 时, $f(x) = -x(x+1)$. 若对任意 $x \in [\lambda, +\infty)$ 不等式 $f(x) \leq \frac{3}{4}$ 恒成立, 则实数 λ 的最小值是 ()
- A. $-\frac{17}{8}$ B. $-\frac{9}{4}$ C. $-\frac{11}{4}$ D. $-\frac{23}{8}$

二. 填空题 (共 4 小题)

13. 已知 $\sin(\alpha + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{3}$, 则 $\sin 2\alpha =$ _____.
14. 圆 $C: (x-2)^2 + y^2 = 4$, 直线 $l_1: y = \sqrt{3}x$, $l_2: y = kx - 1$, 若 l_1, l_2 被圆 C 所截得的弦的长度之比为 1:2, 则 k 的值为 _____.
15. 已知一圆柱内接于一个半径为 $\sqrt{3}$ 的球内, 则该圆柱的最大体积为 _____.
16. 如图, 已知圆内接四边形 $ABCD$, 其中 $AB=6, BC=3, CD=4, AD=5$, 则 $\frac{2}{\sin A} + \frac{2}{\sin B} =$ _____.

三. 解答题 (共 7 小题)

17. 已知数列 $\{a_n\}$ 的各项都为正数, $a_1=2$, 且 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2a_n}{a_{n+1}} + 1$.
- (I) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
- (II) 设 $b_n = [\lg(\log_2 a_n)]$, 其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 如 $[0.9]=0, [lg99]=1$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 2020 项和.
18. 某公司为了对某种商品进行合理定价, 需了解该商品的月销售量 y (单位: 万件) 与月销售单价 x (单位: 元/件) 之间的关系, 对近 6 个月的月销售量 y_i 和月销售单价 x_i ($i=1, 2, 3, \dots, 6$) 数据进行了统计分析, 得到一组检测数据如表所示:
- | | | | | | | |
|-----------------|----|----|----|----|----|----|
| 月销售单价 x (元/件) | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 月销售量 y (万件) | 89 | 83 | 82 | 79 | 74 | 67 |
- (1) 若用线性回归模型拟合 y 与 x 之间的关系, 现有甲、乙、丙三位实习员工求得回归直线方程分别为: $\hat{y} = -4x+105$, $\hat{y} = 4x+53$ 和 $\hat{y} = -3x+104$, 其中有且仅有一位实习员工的计算结果是正确的. 请结合统计学的相关知识, 判断哪位实习员工的计算结果是正确的, 并说明理由;

(2) 若用 $y=ax^2+bx+c$ 模型拟合 y 与 x 之间的关系, 可得回归方程为 $y=-0.375x^2+0.875x+90.25$, 经计算该模型和 (1) 中正确的线性回归模型的相关指数 R^2 分别为 0.9702 和 0.9524, 请用 R^2 说明哪个回归模型的拟合效果更好;

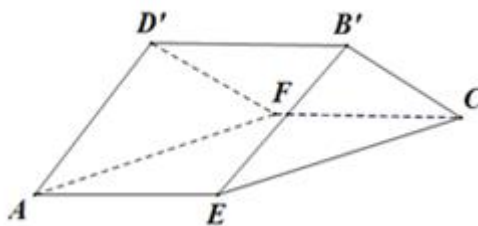
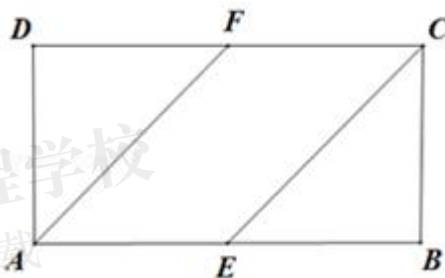
(3) 已知该商品的月销售额为 z (单位: 万元), 利用 (2) 中的结果回答问题: 当月销售单价为何值时, 商品的月销售额预报值最大? (精确到 0.01)

参考数据: $\sqrt{6547} \approx 80.91$.

19. 如图, 四边形 $ABCD$ 为长方形, $AB=2BC=4$, E 、 F 分别为 AB 、 CD 的中点, 将 $\triangle ADF$ 沿 AF 折到 $\triangle AD'F$ 的位置, 将 $\triangle BCE$ 沿 CE 折到 $\triangle B'CE$ 的位置, 使得平面 $AD'F \perp$ 底面 $AECF$, 平面 $B'CE \perp$ 底面 $AECF$, 连接 $B'D'$.

(1) 求证: $B'D' \parallel$ 平面 $AECF$;

(2) 求三棱锥 $B'-AD'F$ 的体积.



20. 在平面直角坐标系 xOy 中, 过点 $F(2, 0)$ 的动圆恒与 y 轴相切, FP 为该圆的直径, 设点 P 的轨迹为曲线 C .

(1) 求曲线 C 的方程;

(2) 过点 $A(2, 4)$ 的任意直线 l 与曲线 C 交于点 M , B 为 AM 的中点, 过点 B 作 x 轴的平行线交曲线 C 于点 D , B 关于点 D 的对称点为 N , 除 M 以外, 直线 MN 与 C 是否有其它公共点? 说明理由.

21. 已知函数 $f(x) = \sin x - x \cos x - \frac{1}{6}x^3$, $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导数.

(1) 证明: $f'(x)$ 在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上不存在零点;

(2) 若 $f(x) > kx - x \cos x - \frac{1}{6}x^3 - 1$ 对 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 恒成立, 求实数 k 的取值范围.

22. 在直角坐标系 xOy 中, 直线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = -2\sqrt{3} + t\cos\alpha, \\ y = t\sin\alpha, \end{cases}$ (t 为参数, α 为倾斜角), 以坐标原点为

极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho = 4\sin\theta$.

(1) 求 C_2 的直角坐标方程;

(2) 直线 C_1 与 C_2 相交于 E, F 两个不同的点, 点 P 的极坐标为 $(2\sqrt{3}, \pi)$, 若 $2|EF| = |PE| + |PF|$, 求直线 C_1 的普通方程.

23. 已知 a, b, c 为正数, 且满足 $a+b+c=1$. 证明:

(1) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 9$; (2) $ac+bc+ab - abc \leq \frac{8}{27}$.