考点限时训练(二十)　第20讲　函数与不等式的综合问题

题号	答案
1	
2	

A组　基础演练

1.设函数 $f(x)=e^{x}(2x-1)-ax+a$,其中 $a<1$,若存在唯一的整数 x_0 使得 $f(x_0)<0$,则 a 的取值范围是　(　　)

A. $\left[-\frac{3}{2e},1\right)$　　B. $\left[-\frac{3}{2e},\frac{3}{4}\right)$

C. $\left[\frac{3}{2e},\frac{3}{4}\right)$　　D. $\left[\frac{3}{2e},1\right)$

2.设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,且 $f(2)=0$,当 $x>0$ 时,有 $\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}<0$ 恒成立,则不等式 $x^2f(x)>0$ 的解集是　(　　)

A. $(-2,0)\cup(2,+\infty)$

B. $(-2,0)\cup(0,2)$

C. $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$

D. $(-\infty,-2)\cup(0,2)$

3.函数 $f(x)=x\sin x+\cos x+x^2$,则不等式 $f(\ln x)<f(1)$ 的解集为________.

4.已知 $a\geqslant1$,$f(x)=x^3+3|x-a|$,若函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的最大值和最小值分别记为 M,m,则 $M-m$ 的值为______.

5.设函数 $f(x)=e^{mx}+x^2-mx$.

(1)证明:$f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减,在 $(0,+\infty)$ 上单调递增;

(2)若对于任意 $x_1,x_2\in[-1,1]$,都有 $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant e-1$ 成立,求 m 的取值范围.

6.已知函数 $f(x)=\ln x+\frac{a}{x}-1$,$a\in\mathbf{R}$.

(1)若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线与直线 $x-y+1=0$ 垂直,求函数 $f(x)$ 的极值;

(2)设函数 $g(x)=x+\frac{1}{x}$.当 $a=-1$ 时,若在区间 $[1,e]$ 上存在 x_0,使得 $g(x_0)<m[f(x_0)+1]$,求实数 m 的取值范围.(e为自然对数的底数)

B组 能力提升

7.已知函数 $f(x)=e^x-ax-b$,若 $f(x)\geqslant 0$ 恒成立,则 ab 的最大值为________.

8.已知函数 $f(x)=\frac{1}{x}+a\ln x$,其中 a 为实常数.若对任意 x_1,$x_2\in[1,3]$,且 $x_1<x_2$,恒有 $\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}>|f(x_1)-f(x_2)|$ 成立,则 a 的取值范围为________.

9.已知函数 $f(x)=\ln x+k$,$g(x)=e^x$,其中 k 为常数,$e=2.71828\cdots$ 是自然对数的底数.

(1)设 $F(x)=f(x)\cdot g(x)$,若函数 $F(x)$ 在区间 $\left[\frac{1}{e},e\right]$ 上有极值点,求实数 k 的取值范围;

(2)证明:当 $k=1$ 时,$1-xf(x)<\frac{g(x)[1+g(-2)]}{x+1}$ 恒成立.

10.已知 $f(x)=x(\ln x-k-1)(x\in\mathbf{R})$.

(1)若对于任意 $x\in[e,e^2]$,都有 $f(x)<4\ln x$ 成立,求 k 的取值范围;

(2)若 $x_1\neq x_2$,且 $f(x_1)=f(x_2)$,证明:$x_1x_2<e^{2k}$.

11.设函数 $f(x)=x^2+a\ln(x+1)$.

(1)若函数 $y=f(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上是单调递增函数,求实数 a 的取值范围;

(2)若函数 $y=f(x)$ 有两个极值点 x_1,x_2,且 $x_1<x_2$,求证:$0<\frac{f(x_2)}{x_1}<-\frac{1}{2}+\ln 2$.

考点限时训练(二十一)　第21讲　函数与方程的综合问题

题号	答案
1	
2	
3	
8	

A组　基础演练

1. 函数 $f(x)=-\frac{1}{x}+\log_2 x$ 的一个零点落在下列哪个区间　(　　)

A. $(0,1)$　　B. $(1,2)$

C. $(2,3)$　　D. $(3,4)$

2. 函数 $f(x)=\lg(|x|+1)-\sin 2x$ 的零点个数为　(　　)

A. 9　　B. 10　　C. 11　　D. 12

3. 已知函数 $f(x)=2x^2+ax-b(a,b\in\mathbf{R})$ 的两个零点分别在区间 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 和 $[1,2]$ 内,则 $z=a+b$ 的最大值为　(　　)

A. 0　　B. -4

C. $-\frac{14}{3}$　　D. -6

4. 已知 $f(x)$ 是定义在 $(0,+\infty)$ 上的单调函数,$f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数. 若对任意 $x\in(0,+\infty)$,都有 $f[f(x)-2^x]=3$,则方程 $f'(x)-\frac{4}{x}=0$ 的解所在的区间是________. (区间长度不大于1)

5. 定义在实数集上的奇函数 $y=f(x)$ 满足 $f(3)=0$,且当 $x>0$ 时,不等式 $f(x)>-xf'(x)$ 恒成立,则函数 $h(x)=xf(x)$ 的零点的个数为________.

6. 已知函数 $f(x)=x-1+\frac{a}{e^x}$ ($a\in\mathbf{R}$,e 为自然对数的底数).

(1)求函数 $f(x)$ 的极值;

(2)当 $a=1$ 时,若直线 $l:y=kx-1$ 与曲线 $y=f(x)$ 没有公共点,求 k 的最大值.

7. 已知函数 $f(x)=\ln x+\frac{a}{x}-1,a\in\mathbf{R}$.

(1)若关于 x 的不等式 $f(x)\leqslant\frac{1}{2}x-1$ 在 $[1,+\infty)$ 上恒成立,求 a 的取值范围;

(2)设函数 $g(x)=\frac{f(x)}{x}$,若 $g(x)$ 在 $[1,e^2]$ 上存在极值,求 a 的取值范围,并判断极值的正负.

B组　能力提升

8. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\sqrt{x^2+1}, & x\geqslant 0,\\ -\ln(1-x), & x<0.\end{cases}$ 若函数 $F(x)=f(x)-kx$ 有且只有两个零点,则 k 的取值范围为　(　　)

A. $(0,1)$　　B. $\left(0,\frac{1}{2}\right)$

C. $\left(\frac{1}{2},1\right)$　　D. $(1,+\infty)$

9. 若曲线 $C_1:y=ax^2(a>0)$ 与曲线 $C_2:y=e^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上存在公共点,则 a 的取值范围为________.

10. 已知函数 $f(x)=\frac{(x-a)^2}{\ln x}$ (其中 a 为常数).

(1)当 $a=0$ 时,求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2)当 $0<a<1$ 时,设函数 $f(x)$ 的3个极值点为 x_1,x_2,x_3,且 $x_1<x_2<x_3$. 证明:$x_1+x_3>\frac{2}{\sqrt{e}}$.